VĂN NHƯ CƯƠNG (Chủ biên) - PHẠM KHẮC BAN
LÊ HUY HÙNG - TẠ MÂN

BÀI TẬP HÌNH HỌC 12

NÂNG CAO



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

VĂN NHƯ CƯƠNG (Chủ biên)
PHẠM KHẮC BAN - LÊ HUY HÙNG - TẠ MÂN

BÀI TẬP HÌNH HỌC NÂNG CAO 12

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Lời nói đầu

Đây là cuốn sách bài tập dùng cho học sinh học theo chương trình Toán nâng cao lớp 12.

Các bài tập trong sách được sắp xếp theo các chương, mục của Sách giáo khoa Hình học 12 Nâng cao.

Phần lớn các bài tập trong sách nhằm củng cố kiến thức và rèn luyện kĩ năng giải toán cho học sinh theo mục tiêu của chương trình và SGK Hình học 12 nâng cao ; những bài tập này tương tự như các bài tập trong SGK. Vì vậy, học sinh làm được các bài tập đó sẽ có định hướng để giải các bài tập trong SGK. Ngoài ra, còn có một số bài tập dành cho học sinh khá, giỏi.

Cuối mỗi chương có các bài tập trắc nghiệm. Mỗi bài có bốn phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Nhiệm vụ của học sinh là tìm ra phương án đúng đó.

Các tác giả chân thành cảm ơn nhóm biên tập của Ban Toán, Nhà xuất bản Giáo dục tại Hà Nội đã giúp đỡ rất nhiều để hoàn thiện cuốn sách này.

Hà Nội, năm 2008

Các tác giả

Chương I KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG

A- CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ ĐỀ BÀI

§1. Khái niệm về khối đa diện

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hình đa diện gồm một số hữu hạn đa giác phẳng thoả mãn hai điều kiện :

a) Hai đa giác hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.

b) Mỗi cạnh của một đa giác là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Mỗi hình đa diện chia không gian thành hai phần : phần bên trong và phần bên ngoài.

Hình đa diện và phần bên trong của nó gọi là khối đa diện.

2. Mỗi khối đa diện có thể phân chia được thành các khối tứ diện.

II - ĐỀ BÀI

1. Khối lập phương là một khối đa diện có 6 mặt là hình vuông. Hãy chỉ ra một khối đa diện không phải là khối lập phương mà các mặt của nó đều là hình vuông.

2. Hãy dùng 4 mặt phẳng để chia một khối tứ diện đã cho thành 9 khối tứ diện.

3. Mỗi lần cưa, máy cưa có thể cưa một hay nhiều tấm gỗ theo một mặt phẳng. Người ta muốn cưa một khối gỗ hình lập phương thành 27 khối lập phương bằng nhau. Có thể dùng ít hơn 6 lần cưa hay không ?

4. Có hay không các khối đa diện với các mặt là tam giác đều và số mặt là số chẵn lớn hơn 2 ?

§2. Phép đối xứng qua mặt phẳng và sự bằng nhau của các khối đa diện

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phép dời hình (trong không gian) là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Phép dời hình biến đường thẳng thành đường thẳng, biến mặt phẳng thành mặt phẳng, ...

Phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm là những phép dời hình.

2. Hai hình đa diện gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.

Hai tứ diện bằng nhau khi và chỉ khi các cạnh tương ứng của chúng bằng nhau.

3. Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) là phép dời hình biến mỗi điểm M thuộc (P) thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MM'.

Mặt phẳng (P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của hình $\mathscr{H}$ nếu phép đối xứng qua mp(P) biến hình $\mathscr{H}$ thành chính nó.

II - ĐỀ BÀI

5. Tìm tất cả các mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều $ABCD$.

6. Cho hình tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh rằng mặt phẳng trung trực của AB và mặt phẳng trung trực của CD chia tứ diện $ABCD$ thành bốn tứ diện bằng nhau.

7. Cho mặt phẳng (P) và phép dời hình f có tính chất : f biến điểm M thành điểm M khi và chỉ khi M nằm trên (P). Chứng tỏ rằng f là phép đối xứng qua mặt phẳng (P).

8. Phép biến hình biến mỗi điểm M của không gian thành chính nó gọi là phép đồng nhất, thường được kí hiệu là e. Hỏi phép đồng nhất e có phải là phép dời hình hay không ?

9. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng tỏ rằng phép dời hình biến mỗi điểm A, B, C, D thành chính nó phải là phép đồng nhất..

10. Cho hai tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có các cạnh tương ứng bằng nhau : $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $DA = D'A'$, $DB = D'B'$, $AC = A'C'$. Chứng minh rằng có không quá một phép dời hình biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D'.

11. Chứng minh rằng phép dời hình biến một mặt cầu thành một mặt cầu có cùng bán kính.

12. Cho hai điểm phân biệt A, B và phép dời hình f biến A thành A, biến B thành B. Chứng minh rằng f biến mọi điểm M nằm trên đường thẳng AB thành chính nó.

13. Cho tam giác ABC và phép dời hình f biến tam giác ABC thành chính nó với $f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(C) = C$. Chứng minh rằng f biến mọi điểm M của mp(ABC) thành chính nó, tức là $f(M) = M$.

14. Cho tứ diện đều $ABCD$ và phép dời hình f biến $ABCD$ thành chính nó, nghĩa là biến mỗi đỉnh của tứ diện thành một đỉnh của tứ diện. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $M = f(M)$ trong các trường hợp sau đây :

a) $f(A) = B, f(B) = C, f(C) = A$;

b) $f(A) = B, f(B) = A, f(C) = D$;

c) $f(A) = B, f(B) = C, f(C) = D$.

15. Chứng minh rằng :

a) Hai hình hộp chữ nhật bằng nhau nếu các kích thước của chúng bằng nhau.

b) Hai hình lập phương bằng nhau nếu các đường chéo của chúng có độ dài bằng nhau.

§3. Phép vị tự và sự đồng dạng của các khối đa diện. Các khối đa diện đều

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phép vị tự tâm O tỉ số k ($k \neq 0$) là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

2. Hình $\mathscr{H}$ gọi là đồng dạng với hình $\mathscr{H}'$ nếu có một phép vị tự biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}_1$ mà hình $\mathscr{H}_1$ bằng hình $\mathscr{H}'$.

3. Có 5 loại khối đa diện đều : khối tứ diện đều, khối lập phương, khối tám mặt đều, khối mười hai mặt đều, khối hai mươi mặt đều.

II - ĐỀ BÀI

16. Cho phép vị tự V tâm O tỉ số $k \neq 1$ và phép vị tự V' tâm O' tỉ số k'. Chứng minh rằng nếu $kk' = 1$ thì hợp thành của V và V' là một phép tịnh tiến.

17. Cho hai đường tròn có bán kính khác nhau và nằm trên hai mặt phẳng song song. Hãy chỉ ra những phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.

18. Cho hai đường tròn có bán kính bằng nhau nằm trên hai mặt phẳng song song. Hãy chỉ ra các phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.

19. Cho hai hình tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có các cạnh tương ứng song song : $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, $AD \parallel A'D'$, $CB \parallel C'B'$, $BD \parallel B'D'$, $DC \parallel D'C'$.

Chứng minh rằng hai tứ diện nói trên đồng dạng.

20. Cho hai tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có các cạnh tương ứng tỉ lệ, nghĩa là :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'D'}{BD} = k.$$

Chứng minh rằng hai tứ diện đã cho đồng dạng.

21. Khẳng định sau đây đúng hay sai : "Nếu khối đa diện có 20 mặt là tam giác đều thì đó là khối hai mươi mặt đều" ?

§4. Thể tích của khối đa diện

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Thể tích của khối hộp chữ nhật bằng tích số ba kích thước.

2. Thể tích của khối chóp bằng một phần ba tích số của diện tích mặt đáy và chiều cao của khối chóp.

3. Thể tích của khối lăng trụ bằng tích số của diện tích mặt đáy và chiều cao của khối lăng trụ.

II - ĐỀ BÀI

22. Cho khối hộp $\mathscr{H}$ có tâm I. Chứng minh rằng nếu mp(α) chia $\mathscr{H}$ thành hai phần có thể tích bằng nhau thì (α) phải đi qua điểm I.

23. Cho khối lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và A_1D bằng 2 và độ dài đường chéo của mặt bên bằng 5.

a) Hạ $AK \perp A_1D$ ($K \in A_1D$). Chứng minh rằng $AK = 2$.

b) Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

24. Đáy của khối lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ là tam giác đều. Mặt phẳng (A_1BC) tạo với đáy một góc 30^o và tam giác A_1BC có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

25. Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy là hình bình hành và $\widehat{BAD} = 45^o$. Các đường chéo AC_1 và DB_1 lần lượt tạo với đáy những góc 45^o và 60^o. Hãy tính thể tích của khối lăng trụ nếu biết chiều cao của nó bằng 2.

26. Cho khối hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a, $\widehat{A_1AB} = \widehat{BAD} = \widehat{A_1AD} = \alpha$ $(0^o < \alpha < 90^o)$. Hãy tính thể tích của khối hộp.

27. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{3}$, $AD = \sqrt{7}$. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với đáy những góc 45^o và 60^o. Hãy tính thể tích khối hộp nếu biết cạnh bên bằng 1.

28. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ mà mặt bên ABB_1A_1 có diện tích bằng 4. Khoảng cách giữa cạnh CC_1 và mặt (ABB_1A_1) bằng 7.

Hãy tính thể tích khối lăng trụ.

29. Cho khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với cạnh huyền AB bằng $\sqrt{2}$. Cho biết mặt phẳng (AA_1B) vuông góc với mặt phẳng (ABC), $AA_1 = \sqrt{3}$, góc $\widehat{A_1AB}$ nhọn, góc giữa mặt phẳng (A_1AC) và mặt phẳng (ABC) bằng 60^o.

Hãy tính thể tích khối lăng trụ.

30. Lấy một mặt phẳng vuông góc với cạnh bên của một khối lăng trụ. Hình chiếu của mặt đáy của khối lăng trụ trên mặt phẳng đó được gọi là *thiết diện thẳng* của khối lăng trụ.

Chứng minh rằng thể tích của khối lăng trụ bằng tích của diện tích thiết diện thẳng với độ dài cạnh bên.

31. Hãy tính thể tích của khối hộp nếu biết độ dài cạnh bên bằng a, diện tích hai mặt chéo lần lượt là S_1, S_2 và góc giữa hai mặt chéo bằng α.

32. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ mà trung đoạn của nó (đường cao của một mặt bên hạ từ đỉnh hình chóp) bằng 6 còn góc giữa hai mặt bên đối diện bằng 60^o. Qua CD, dựng mặt phẳng (α) vuông góc với mp(SAB), cắt SA, SB lần lượt tại P_1 và P.

Hãy tính thể tích khối chóp $S.CDP_1P$.

33. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có chiều cao bằng h và góc ASB bằng 2φ. Hãy tính thể tích khối chóp.

34. Khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C và $SA \perp (ABC)$, $SC = a$. Hãy tìm góc giữa hai mặt phẳng (SCB) và (ABC) để thể tích khối chóp lớn nhất.

35. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ mà khoảng cách từ đỉnh A đến mp(SBC) bằng $2a$. Với giá trị nào của góc giữa mặt bên và mặt đáy của khối chóp thì thể tích của khối chóp nhỏ nhất ?

36. Khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$; đáy là tam giác ABC cân tại A, độ dài trung tuyến AD bằng a, cạnh bên SB tạo với đáy một góc α và tạo với mặt (SAD) góc β. Tính thể tích khối chóp.

37. Biết thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng V. Tính thể tích khối tứ diện $ACB'D'$.

38. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi d là khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD, α là góc giữa hai đường thẳng đó. Chứng minh rằng

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.d.\sin\alpha.$$

39. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Gọi B', D' lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C'. Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$.

40. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối bằng nhau :

$$AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c.$$

41. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng h. Tính thể tích khối chóp $A.BC'A'$.

42. Cho đường tròn đường kính AB nằm trên mặt phẳng (P) và một điểm M di động trên đường tròn. Trên đường thẳng vuông góc với mp(P) tại A, lấy một điểm S. Mặt phẳng (Q) qua A vuông góc với SB tại K cắt SM tại H. Tìm vị trí của M để thể tích khối chóp $S.AHK$ lớn nhất. Chứng minh rằng khi đó cung $\overset{\frown}{AM}$ nhỏ hơn cung $\overset{\frown}{BM}$.

43. Khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi B', D' lần lượt là trung điểm của SB, SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C'. Tìm tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.AB'C'D'$ và $S.ABCD$.

44. Khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD và SC. Chứng minh mặt phẳng (MNP) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

45. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Một mặt phẳng (α) đi qua A, B và trung điểm M của cạnh SC. Tính tỉ số thể tích của hai phần khối chóp bị phân chia bởi mặt phẳng đó.

46. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm E và F lần lượt là trung điểm của $C'B'$ và $C'D'$.

a) Dựng thiết diện của khối lập phương khi cắt bởi mp(AEF).

b) Tính tỉ số thể tích hai phần của khối lập phương bị chia bởi mặt phẳng (AEF).

47. Cho điểm M trên cạnh SA, điểm N trên cạnh SB của khối chóp tam giác $S.ABC$ sao cho $\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}$, $\frac{SN}{NB} = 2$. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SC chia khối chóp thành hai phần. Tìm tỉ số thể tích hai phần đó.

48. Bốn đường thẳng Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 đôi một song song và không có ba đường thẳng nào nằm trên cùng một mặt phẳng. Một mặt phẳng (P) cắt chúng theo thứ tự tại A, B, C, D. Một mặt phẳng (P') cắt chúng theo thứ tự tại A', B', C', D'. Chứng minh hai khối tứ diện $D'ABC$ và $DA'B'C'$ có thể tích bằng nhau.

49. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của DD'. Tính khoảng cách giữa CK và $A'D$.

50. Cho tứ diện $ABCD$ có điểm O nằm trong tứ diện và cách đều các mặt của tứ diện một khoảng r. Gọi h_A, h_B, h_C, h_D lần lượt là khoảng cách từ các điểm A, B, C, D đến các mặt đối diện. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}.$$

51. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm nằm trong một hình lăng trụ đều đến các mặt của nó không phụ thuộc vào vị trí của điểm nằm trong hình lăng trụ đó.

52. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ mà đáy là tam giác vuông tại B có $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$ $(c^2 \geq a^2 + b^2)$. Một mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với CA'.

a) Xác định thiết diện của hình lăng trụ khi cắt bởi mp(P).

b) Tính diện tích thiết diện nói trên.

53. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ và M là một điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M song song với SA, SB, SC lần lượt cắt các mặt (BCS), (CAS), (ABS) tại A', B', C'. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{V_{M.BCS}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{MA'}{SA}$;

b) $\dfrac{MA'}{SA} + \dfrac{MB'}{SB} + \dfrac{MC'}{SC}$ không đổi. Tìm tổng đó.

54. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC, SD theo thứ tự tại K, L, M, N.

Chứng minh rằng :

a) $V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = V_{S.ABD} = V_{S.BCD}$;

b) $\dfrac{SA}{SK} + \dfrac{SC}{SM} = \dfrac{SB}{SL} + \dfrac{SD}{SN}$.

Ôn tập chương I

Bài tập tự luận

55. Cho phép dời hình f. Biết rằng có một điểm I duy nhất sao cho f biến I thành chính nó, ngoài ra hợp thành của f với chính nó là phép đồng nhất. Chứng minh f là phép đối xứng tâm.

56. Cho hình chóp cụt đều có hai đáy là hai đa giác đều $Đ_1$ và $Đ_2$. Hãy chỉ ra các phép vị tự biến $Đ_1$ thành $Đ_2$.

57. Người ta gọt một khối lập phương bằng gỗ để lấy khối tám mặt đều nội tiếp nó (tức là khối có các đỉnh là các tâm của các mặt khối lập phương). Biết cạnh của khối lập phương bằng a, hãy tính thể tích của khối tám mặt đều đó.

58. Cho đường tròn đường kính $AB = 2R$ nằm trong mặt phẳng (P) và một điểm M nằm trên đường tròn đó sao cho $\widehat{MAB} = \alpha$. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A, lấy điểm S sao cho $SA = h$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SM và SB.

a) Chứng minh rằng $SB \perp \text{mp}(KHA)$.

b) Gọi I là giao điểm của HK với (P). Hãy chứng minh AI là tiếp tuyến của đường tròn đã cho.

c) Cho $h = 2R$, $\alpha = 30^{\circ}$, tính thể tích khối chóp $S.KHA$.

59. Các cạnh bên của hình chóp $O.ABC$ đôi một vuông góc với nhau và $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Tính thể tích của khối lập phương nằm trong hình chóp này mà một đỉnh trùng với O và ba cạnh cùng xuất phát từ O nằm trên OA, OB, OC, còn đỉnh đối diện với O thuộc mặt phẳng (ABC).

60. Trên nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$, lấy một điểm C tuỳ ý (C khác A, B). Kẻ $CH \perp AB$ ($H \in AB$), gọi I là trung điểm của CH.

Trên nửa đường thẳng It vuông góc với mp(ABC), lấy điểm S sao cho $\widehat{ASB} = 90^{\circ}$.

1. Chứng minh rằng khi C chạy trên nửa đường tròn đã cho thì :

a) Mặt phẳng (SAB) cố định ;

b) Điểm cách đều các điểm S, A, B, I chạy trên một đường thẳng cố định.

2. Cho $AH = x$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo R và x. Tìm vị trí của C để thể tích đó lớn nhất.

61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và cạnh bên SA vuông góc với đáy. Một mặt phẳng (α) đi qua A, vuông góc với cạnh SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'.

1. Chứng minh rằng tứ giác $AB'C'D'$ có hai góc đối diện là góc vuông.

2. Chứng minh rằng nếu S di chuyển trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại A thì mp$(AB'C'D')$ luôn đi qua một đường thẳng cố định và các điểm A, B, B', C, C', D, D' cùng cách đều một điểm cố định một khoảng không đổi.

3. Giả sử góc giữa cạnh SC và mặt bên (SAB) bằng x.

Tính tỉ số giữa thể tích của hình chóp $S.AB'C'D'$ và thể tích của hình chóp $S.ABCD$ theo x, biết rằng $AB = BC$.

6. Số mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là

(A) 4 ; (B) 6 ;

(C) 8 ; (D) 10.

7. Hình $\mathscr{H}$ gồm ba mặt phẳng (P), (Q) và (R), trong đó $(P) // (Q)$ và $(P) \perp (R)$. Các mặt phẳng đối xứng của $\mathscr{H}$ là

(A) Mặt phẳng cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) ;

(B) Mặt phẳng (R) và mặt phẳng cách đều (P) và (Q) ;

(C) Mặt phẳng (R) ;

(D) Cả ba đáp án trên đều sai.

8. Thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số k và phép đối xứng qua mặt phẳng (P), $\big(O \notin (P)\big)$, ta được phép biến hình f. Giả sử (Q) là mặt phẳng qua O và vuông góc với (P). Khi đó f biến (Q) thành :

(A) Mặt phẳng (Q') song song với (Q) ;

(B) Mặt phẳng (P) ;

(C) Mặt phẳng (Q) ;

(D) Mặt phẳng (P') qua O và song song với (P).

9. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

(A) Phép vị tự biến mặt phẳng thành mặt phẳng song song với nó ;

(B) Phép vị tự biến mặt phẳng qua tâm vị tự thành chính nó ;

(C) Không có phép vị tự nào biến hai điểm phân biệt A và B lần lượt thành A và B ;

(D) Phép vị tự biến đường thẳng thành đường thẳng song song với nó.

10. Khối mười hai mặt đều thuộc loại :

(A) $\{3, 5\}$; (B) $\{3, 6\}$;

(C) $\{5, 3\}$; (D) $\{4, 4\}$.

11. Đáy của một hình hộp đứng là một hình thoi có đường chéo nhỏ bằng d và góc nhọn bằng α. Diện tích của một mặt bên bằng S. Thể tích của hình hộp đã cho là

(A) $dS\cos\dfrac{\alpha}{2}$; (B) $dS\sin\dfrac{\alpha}{2}$;

(C) $\dfrac{1}{2}dS\sin\alpha$; (D) $dS\sin\alpha$.

12. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của hai cạnh AA' và BB'. Khi đó thể tích của khối đa diện $ABCIJC'$ bằng

(A) $\frac{3}{4}V$; (B) $\frac{4}{5}V$;

(C) $\frac{2}{3}V$; (D) $\frac{3}{5}V$.

13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là một hình thoi và hai mặt chéo $ACC'A'$, $BDD'B'$ đều vuông góc với mặt phẳng đáy. Hai mặt này có diện tích lần lượt bằng $100\,\text{cm}^2$, $105\,\text{cm}^2$ và cắt nhau theo một đoạn thẳng có độ dài 10cm. Khi đó thể tích của hình hộp đã cho là

(A) $225\sqrt{5}\,\text{cm}^3$; (B) $425\,\text{cm}^3$;

(C) $235\sqrt{5}\,\text{cm}^3$; (D) $525\,\text{cm}^3$.

14. Khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30°. Hình chiếu của đỉnh A' trên mặt phẳng đáy (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC. Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

(A) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$; (B) $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$;

(C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$; (D) $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

15. Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích các mặt $ABCD$, $ABB'A'$, $ADD'A'$ lần lượt bằng $20\,\text{cm}^2$, $28\,\text{cm}^2$ và $35\,\text{cm}^2$. Thể tích của hình hộp là

(A) $160\,\text{cm}^3$; (B) $120\,\text{cm}^3$;

(C) $130\,\text{cm}^3$; (D) $140\,\text{cm}^3$.

16. Hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là một hình thoi với diện tích S_1. Hai mặt chéo $ACC'A'$ và $BDD'B'$ có diện tích lần lượt bằng S_2 và S_3. Khi đó thể tích của hình hộp là

(A) $\sqrt{\frac{S_1S_2S_3}{2}}$; (B) $\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{S_1S_2S_3}$;

(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{S_1S_2S_3}$;

(D) $\frac{S_1}{2}\sqrt{S_2S_3}$.

17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a, tâm O. Khi đó thể tích khối tứ diện $AA'B'O$ là

(A) $\frac{a^3}{8}$;

(B) $\frac{a^3}{12}$;

(C) $\frac{a^3}{9}$;

(D) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

18. Cho biết thể tích của một hình hộp chữ nhật là V, đáy là hình vuông cạnh a. Khi đó diện tích toàn phần của hình hộp bằng

(A) $2\left(\frac{V}{a}+a^2\right)$;

(B) $4\frac{V}{a}+2a^2$;

(C) $2\left(\frac{V}{a^2}+a\right)$;

(D) $4\left(\frac{V}{a^2}+a\right)$.

19. Cho một hình chóp tam giác có đường cao bằng 100cm và các cạnh đáy bằng 20cm, 21cm, 29cm. Thể tích của hình chóp đó bằng

(A) $6000\,\text{cm}^3$;

(B) $6213\,\text{cm}^3$;

(C) $7000\,\text{cm}^3$;

(D) $7000\sqrt{2}\,\text{cm}^3$.

20. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ với $SA \perp SB$, $SB \perp SC$, $SC \perp SA$, $SA = a, SB = b$, $SC = c$. Thể tích của hình chóp bằng

(A) $\frac{1}{3}abc$;

(B) $\frac{1}{6}abc$;

(C) $\frac{1}{9}abc$;

(D) $\frac{2}{3}abc$.

21. Một hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng b và chiều cao h. Khi đó, thể tích của hình chóp bằng

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(b^2-h^2\right)h$;

(B) $\frac{\sqrt{3}}{12}\left(b^2-h^2\right)h$;

(C) $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(b^2-h^2\right)b$;

(D) $\frac{\sqrt{3}}{8}\left(b^2-h^2\right)h$.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$; (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$;

(C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$; (D) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

28. Đường chéo của một hình hộp chữ nhật bằng d, góc giữa đường chéo và mặt đáy là α, góc nhọn giữa hai đường chéo của đáy bằng β. Thể tích của hình hộp đó bằng

(A) $\frac{1}{2}d^3\cos^2\alpha\sin\alpha\sin\beta$; (B) $\frac{1}{3}d^3\cos^2\alpha\sin\alpha\sin\beta$;

(C) $d^3\sin^2\alpha\cos\alpha\sin\beta$; (D) $\frac{1}{2}d^3\sin^2\alpha\cos\alpha\sin\beta$.

29. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a, đường chéo AC' tạo với mặt bên $(BCC'B')$ một góc α $\left(0 < \alpha < 45^\circ\right)$. Khi đó, thể tích của khối lăng trụ bằng

(A) $a^3\sqrt{\cot^2\alpha + 1}$; (B) $a^3\sqrt{\cot^2\alpha - 1}$;

(C) $a^3\sqrt{\cos 2\alpha}$; (D) $a^3\sqrt{\tan^2\alpha - 1}$.

30. Đáy của hình chóp $S.ABCD$ là một hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và có độ dài bằng a. Thể tích khối tứ diện $SBCD$ bằng

(A) $\dfrac{a^3}{3}$; (B) $\dfrac{a^3}{4}$;

(C) $\dfrac{a^3}{6}$; (D) $\dfrac{a^3}{8}$.

31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, còn cạnh bên SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30°. Thể tích của hình chóp đó bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$; (B) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$;

(C) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$; (D) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình vuông cạnh a. Các mặt phẳng (SAB), (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy, còn cạnh bên SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 30^o. Thể tích của hình chóp đã cho bằng

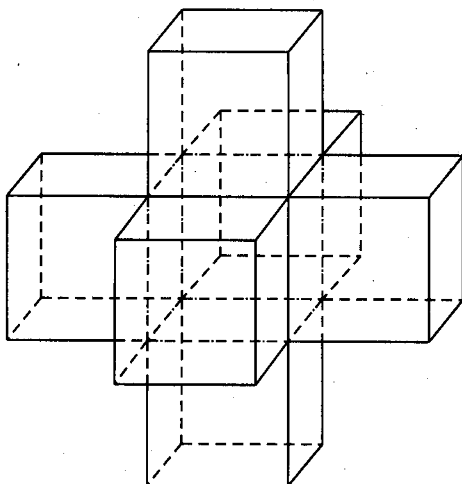
(A) $\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$; (B) $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$;

(C) $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$; (D) $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

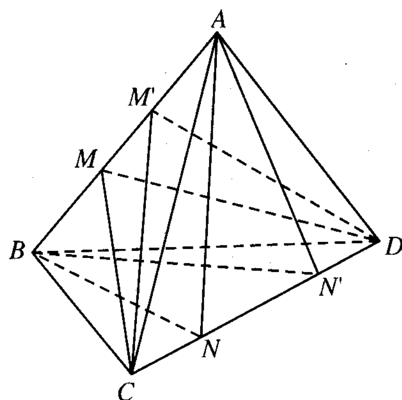
B - LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

§1. Khái niệm về khối đa diện

1. Lấy 7 khối lập phương có cùng kích thước rồi ghép lại với nhau như hình 1, ta được khối đa diện có 30 mặt đều là hình vuông.



Hình 1



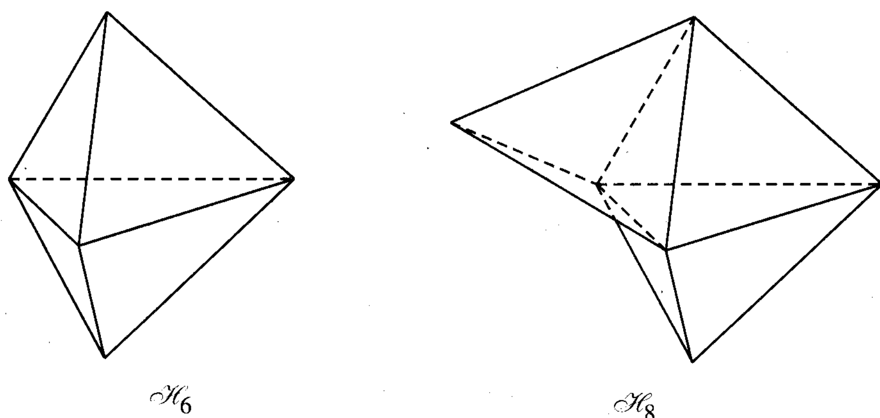
Hình 2

2. Giả sử $ABCD$ là khối tứ diện đã cho. Chia cạnh AB thành ba đoạn thẳng bởi các điểm chia M và M', chia cạnh CD thành ba đoạn thẳng bởi các điểm N và N'. Khi đó 4 mặt phẳng (ABN), (ABN'), (CDM), (CDM') sẽ phân chia khối tứ diện $ABCD$ thành 9 khối tứ diện (h.2).

3. Không thể ít hơn 6 lần cưa vì trong 27 hình lập phương được cưa ra, có hình lập phương "chính giữa" mà 6 mặt của nó đều phải cưa theo 6 lần khác nhau.

4. Khối tứ diện đều có 4 mặt là tam giác đều. Ghép hai khối tứ diện đều bằng nhau (một mặt của tứ diện này ghép vào một mặt của tứ diện kia), ta được khối đa diện $\mathscr{H}_6$ có 6 mặt là tam giác đều. Ghép thêm vào $\mathscr{H}_6$ một khối tứ diện đều nữa, ta được khối đa diện $\mathscr{H}_8$ có 8 mặt là các tam giác đều (h.3).

Bằng cách như vậy, ta được khối đa diện có $2n$ mặt là những tam giác đều.



Hình 3

§2. Phép đối xứng qua mặt phẳng và sự bằng nhau của các khối đa diện

5. Giả sử (α) là mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều $ABCD$, tức là phép đối xứng qua mp(α), kí hiệu D_α, biến tập hợp $\{A, B, C, D\}$ thành chính nó. Vì D_α không thể biến mỗi đỉnh thành chính nó (vì khi đó D_α là phép đồng nhất) nên phải có một đỉnh, chẳng hạn A, biến thành một đỉnh khác, chẳng hạn B. Khi đó, (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB (hiển nhiên (α) đi qua C và D).

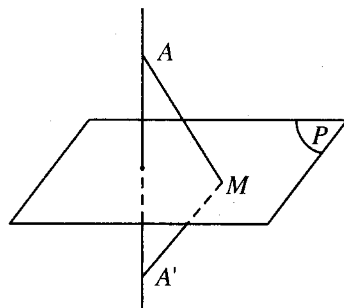
Như vậy, tứ diện đều $ABCD$ có 6 mặt phẳng đối xứng, đó là các mặt phẳng trung trực của các cạnh.

6. Gọi I là trung điểm của AB thì mp(ICD) là mặt phẳng trung trực của AB nên mặt phẳng đó chia tứ diện đều $ABCD$ thành hai tứ diện bằng nhau : tứ diện $AICD$ và tứ diện $BICD$. Gọi J là trung điểm CD thì mp(JAB) là mặt phẳng đối xứng của tứ diện $AICD$ nên nó chia tứ diện đó thành hai tứ diện bằng nhau : tứ diện $CAIJ$ và tứ diện $DAIJ$. Cố nhiên mp(JAB) cũng là mặt phẳng đối xứng của tứ diện $BICD$ nên nó chia tứ diện đó thành hai tứ diện bằng nhau : tứ diện $CBIJ$ và tứ diện $DBIJ$.

Chú ý rằng phép đối xứng qua đường thẳng IJ biến tứ diện $CAIJ$ thành tứ diện $DBIJ$ nên hai tứ diện đó bằng nhau.

Tóm lại ta có bốn hình tứ diện bằng nhau : $CAIJ$, $DAIJ$, $CBIJ$, $DBIJ$.

7. (h.4) Phép dời hình f biến mọi điểm M nằm trên (P) thành chính nó. Với điểm A không nằm trên (P), ta gọi A' là ảnh của A qua f. Khi đó, nếu $M \in (P)$ thì $MA = MA'$. Vậy (P) là mặt phẳng trung trực của AA', tức A' đối xứng với A qua (P). Vậy f là phép đối xứng qua mp(P).



Hình 4

8. Phép đồng nhất e biến hai điểm M, N bất kì lần lượt thành M, N. Vì $MN = MN$ nên e là phép dời hình.

9. Giả sử phép dời hình f biến mỗi điểm A, B, C, D thành chính nó, tức là $f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(C) = C$, $f(D) = D$. Ta chứng minh rằng f biến điểm M bất kì thành M. Thật vậy giả sử $M' = f(M)$ và M' khác M. Khi đó, vì phép dời hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm nên $AM = AM'$, $BM = BM'$, $CM = CM'$, $DM = DM'$, suy ra bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MM', điều đó trái với giả thiết $ABCD$ là hình tứ diện. Vậy M' trùng với M và do đó, f là phép đồng nhất.

10. Giả sử có hai phép dời hình f_1 và f_2 đều biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D'. Nếu f_1 và f_2 khác nhau thì có ít nhất một điểm M sao cho nếu $M_1 = f_1(M)$ và $M_2 = f_2(M)$ thì M_1 và M_2 là hai điểm phân biệt. Khi đó, vì f_1 và f_2 đều là phép dời hình nên $A'M_1 = AM$ và $A'M_2 = AM$, vậy $A'M_1 = A'M_2$, tương tự $B'M_1 = B'M_2$, $C'M_1 = C'M_2$, $D'M_1 = D'M_2$, do đó bốn điểm A', B', C', D' cùng nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng M_1M_2, trái với giả thiết $A'B'C'D'$ là hình tứ diện. Vậy với mọi điểm M, ta đều có $f_1(M) = f_2(M)$, tức là hai phép dời hình f_1 và f_2 trùng nhau.

11. Giả sử (S) là mặt cầu tâm O bán kính R và f là phép dời hình bất kì. Gọi $O' = f(O)$ và (S') là mặt cầu tâm O' bán kính R. Nếu $M \in (S)$ và $f(M) = M'$ thì $O'M' = OM = R$ nên $M' \in (S')$. Ngược lại, nếu $M' \in (S')$ và $M' = f(M)$ thì $OM = O'M' = R$ nên $M \in (S)$. Như vậy, phép dời hình f biến mặt cầu (S) thành mặt cầu (S') có cùng bán kính.

12. Ta có $f(A) = A$, $f(B) = B$. Giả sử điểm M thuộc đường thẳng AB và $f(M) = M'$. Khi đó, M' thuộc đường thẳng AB và $AM = AM'$, $BM = BM'$. Suy ra M' trùng M, tức là f biến M thành chính nó.

13. Vì $f(A) = A$, $f(B) = B$ và $f(C) = C$ nên f biến mp(ABC) thành mp(ABC). Bởi vậy, nếu M thuộc mp(ABC) và $f(M) = M'$ thì M' thuộc mp(ABC) và $AM = AM'$, $BM = BM'$, $CM = CM'$. Nếu M' và M phân biệt thì ba điểm A, B, C cùng thuộc đường thẳng trung trực của đoạn thẳng MM' (xét trên mp(ABC)), trái với giả thiết ABC là tam giác. Vậy $f(M) = M$.

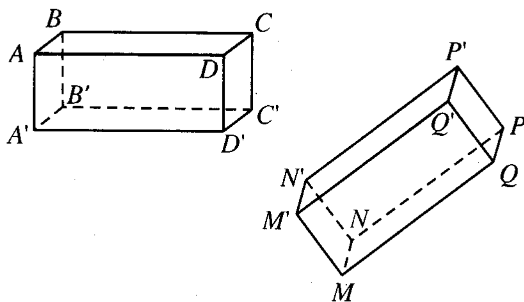
14. a) Theo giả thiết $f(A) = B$ và $f(B) = C, f(C) = A$. Bởi vậy $f(M) = M$ khi và chỉ khi $MA = MB = MC$. Suy ra tập hợp các điểm M là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Theo giả thiết $f(A) = B, f(B) = A, f(C) = D$. Bởi vậy $f(M) = M$ khi và chỉ khi $MA = MB$ và $MC = MD$, tức là M đồng thời nằm trên hai mặt phẳng trung trực của AB và CD. Suy ra tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua trung điểm của AB và CD.

c) Theo giả thiết $f(A) = B, f(B) = C, f(C) = D$. Bởi vậy $f(M) = M$ khi và chỉ khi $MA = MB = MC = MD$. Suy ra tập hợp các điểm M gồm một điểm duy nhất là trọng tâm của tứ diện $ABCD$.

15. a) Giả sử hai hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ và $MNPQ.M'N'P'Q'$ có $AB = MN$, $AD = MQ$, $AA' = MM'$ (h.5).

Ta thấy rằng khi đó, hai tứ diện $ABDA'$ và $MNQM'$ có các cạnh tương ứng bằng nhau nên có phép dời hình f biến A, B, D, A' lần lượt thành các điểm M, N, Q, M'.



Hình 5

Khi đó vì f biến tam giác ABD thành tam giác MNQ nên f biến điểm C thành điểm P. Cũng tương tự như thế, f biến B' thành N', biến D' thành Q'

và biến C' thành P'. Vậy f biến hình hộp thứ nhất thành hình hộp thứ hai, do đó hai hình hộp bằng nhau.

b) Hiển nhiên đường chéo của hai hình lập phương bằng nhau khi và chỉ khi cạnh của chúng bằng nhau, do đó theo a), hai hình lập phương đó bằng nhau.

§3. Phép vị tự và sự đồng dạng của các khối đa diện. Các khối đa diện đều

16. Với mỗi điểm M, ta lấy M_1 sao cho $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$ rồi lấy điểm M' sao cho $\overrightarrow{O'M'} = k'\overrightarrow{O'M_1}$ thì hợp thành của V và V' biến điểm M thành điểm M'. Ta có :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{O'M'} - \overrightarrow{O'M_1}$$

$$= \overrightarrow{OM_1} - \frac{1}{k}\overrightarrow{OM_1} + k'\overrightarrow{O'M_1} - \overrightarrow{O'M_1} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\overrightarrow{OM_1} + (k' - 1)\overrightarrow{O'M_1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{k}\right)\overrightarrow{OM_1} + (1 - k')\overrightarrow{M_1O'}.$$

Chú ý rằng vì $kk' = 1$ nên $k' = \frac{1}{k}$, bởi vậy đẳng thức trên trở thành :

$$\overrightarrow{MM'} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1O'}\right) = \frac{k-1}{k}\overrightarrow{OO'}.$$

Từ đó suy ra hợp thành của V và V' là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \frac{k-1}{k}\overrightarrow{OO'}$.

17. Gọi $(O ; R)$ và $(O' ; R')$ là hai đường tròn nằm trên hai mặt phẳng song song, với $R \neq R'$. Đặt $k = \frac{R'}{R}$ thì $k \neq 1$. Khi đó, tồn tại hai điểm I và I' sao cho $\overrightarrow{IO'} = k\overrightarrow{IO}$ và $\overrightarrow{I'O'} = -k\overrightarrow{I'O}$. Dễ thấy rằng phép vị tự tâm I, tỉ số k và phép vị tự tâm I', tỉ số $-k$ đều biến đường tròn $(O ; R)$ thành đường tròn $(O' ; R')$.

18. Đó là phép vị tự có tâm là trung điểm của đoạn thẳng nối tâm hai đường tròn và có tỉ số vị tự $k = -1$, đó cũng là phép đối xứng tâm.

19. Vì $AB \parallel A'B'$ nên có số $k \neq 0$ sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{A'B'}$. Ta chứng minh rằng khi đó, ta cũng có $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{CB} = k\overrightarrow{C'B'}$, $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{B'D'}$, $\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{D'C'}$.

Thật vậy, hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có các cạnh tương ứng song song nên ta phải có các số l và m sao cho $\overrightarrow{AC} = l\overrightarrow{A'C'}$ và $\overrightarrow{CB} = m\overrightarrow{C'B'}$. Khi đó :

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = k\left(\overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{B'C'}\right)$$

$$\Leftrightarrow l\overrightarrow{A'C'} - m\overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{A'C'} - k\overrightarrow{B'C'}$$

$$\Leftrightarrow (l-k)\overrightarrow{A'C'} = (m-k)\overrightarrow{B'C'}.$$

Vì hai vectơ $\overrightarrow{A'C'}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ không cùng phương nên đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi $l - k = m - k = 0$, tức là $l = m = k$, vậy $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{A'C'}$ và $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{B'C'}$.

Các đẳng thức còn lại được chứng minh tương tự.

Xét trường hợp $k = 1$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$,... nên

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = ...$$

Suy ra phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$ biến tứ diện $ABCD$ thành tứ diện $A'B'C'D'$.

Nếu $k \neq 1$ thì hai đường thẳng AA' và BB' cắt nhau tại một điểm O nào đó. Khi đó, rõ ràng phép vị tự V tâm O tỉ số $\frac{1}{k}$ biến tứ diện $ABCD$ thành tứ diện $A'B'C'D'$.

Vậy trong cả hai trường hợp nói trên, hai tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$ đồng dạng.

20. Gọi V là một phép vị tự tâm O tỉ số k (O là điểm bất kì), $A_1B_1C_1D_1$ là ảnh của tứ diện $ABCD$ qua V. Khi đó $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, $C_1D_1 = kCD$, $D_1A_1 = kDA$, $C_1A_1 = kCA$, $B_1D_1 = kBD$.

Vậy $A_1B_1 = A'B'$, $B_1C_1 = B'C'$, $C_1D_1 = C'D'$, $D_1A_1 = D'A'$, $C_1A_1 = C'A'$, $B_1D_1 = B'D'$.

Do đó tứ diện $A'B'C'D'$ bằng tứ diện $A_1B_1C_1D_1$, suy ra hai tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$ đồng dạng.

21. Khẳng định đó không đúng. Theo bài 4, ta có thể ghép 9 khối tứ diện đều bằng nhau theo nhiều cách khác nhau để có được một khối đa diện có 20 mặt là tam giác đều.

§4. Thể tích của khối đa diện

22. Giả sử $\mathscr{H}$ là khối hộp có tâm I và (α) là mặt phẳng không đi qua I. Ta phải chứng minh rằng (α) chia $\mathscr{H}$ thành hai khối đa diện $\mathscr{H}_1$ và $\mathscr{H}_2$ có thể tích không bằng nhau.

Ta gọi (α') là mặt phẳng đi qua I và song song với (α). Khi đó, (α') chia $\mathscr{H}$ thành hai khối đa diện $\mathscr{H}'_1$ và $\mathscr{H}'_2$. Vì I là tâm của $\mathscr{H}$ nên phép đối xứng tâm I biến $\mathscr{H}'_1$ thành $\mathscr{H}'_2$. Vậy hai khối đa diện $\mathscr{H}'_1$ và $\mathscr{H}'_2$ có thể tích bằng nhau và bằng $\frac{V}{2}$, trong đó V là thể tích của $\mathscr{H}$.

Cố nhiên phần của $\mathscr{H}$ nằm giữa hai mặt phẳng song song (α) và (α') có thể tích khác 0 nên thể tích của $\mathscr{H}_1$ và $\mathscr{H}_2$ không thể bằng nhau.

23. (h.6)

a) $AB \parallel A_1B_1 \Rightarrow AB \parallel (A_1B_1D)$

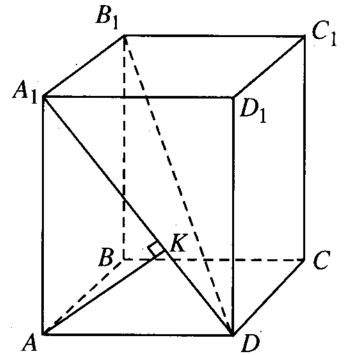
$\Rightarrow d(A,(A_1B_1D)) = d(AB, A_1D)$.

Ta có $A_1B_1 \perp (AA_1D_1D)$

$\Rightarrow A_1B_1 \perp AK$.

Mặt khác $A_1D \perp AK$, suy ra $AK \perp (A_1B_1D)$.

Vậy $AK = d(A,(A_1B_1D)) = d(AB, A_1D) = 2$.



Hình 6

b) Xét tam giác vuông A_1AD, ta có :

$$AK^2 = A_1K.KD.$$

Đặt $A_1K = x \Rightarrow 4 = x(5-x) \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = 4$.

Với $x = 1$, $AD = \sqrt{AK^2 + KD^2} = 2\sqrt{5}$, $AA_1 = \sqrt{A_1D^2 - AD^2} = \sqrt{5}$.

Khi đó $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = 20\sqrt{5}$.

Với $x = 4$, tương tự ta có : $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = 10\sqrt{5}$.

24. (h.7) Giả sử $CK = x$, ở đây AK là đường cao của tam giác đều ABC.

Từ định lí ba đường vuông góc, ta có $A_1K \perp BC$. Từ đó $\widehat{AKA_1} = 30^o$.

Xét tam giác vuông A_1AK, ta có

$$A_1K = AK : \cos 30^o = \frac{2AK}{\sqrt{3}},$$

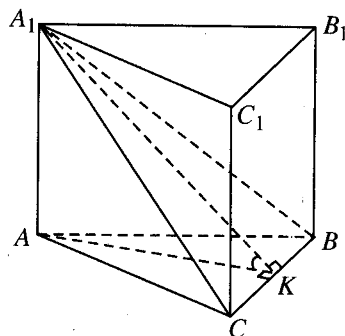
mà $AK = \dfrac{2x\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3}$ nên $A_1K = 2x$,

$$A_1A = AK \tan 30^o = x\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{3} = x.$$

Vậy $V_{ABC.A_1B_1C_1} = CK.AK.AA_1 = x^3\sqrt{3}$.

Nhưng $S_{A_1BC} = CK.A_1K = 8$ nên $x.2x = 8 \Rightarrow x = 2$.

Vậy $V_{ABC.A_1B_1C_1} = 8\sqrt{3}$.

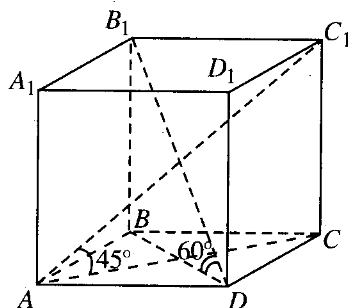


Hình 7

25. (h.8)

Hình lăng trụ đã cho là hình lăng trụ đứng nên các cạnh bên vuông góc với đáy và độ dài cạnh bên bằng chiều cao của hình lăng trụ. Từ giả thiết ta suy ra :

$$\widehat{C_1AC} = 45^o,\ \widehat{B_1DB} = 60^o.$$



Hình 8

Từ đó suy ra

$$AC = CC_1 = 2,\ BD = 2\cot 60^o = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Áp dụng định lí hàm số côsin ta có :

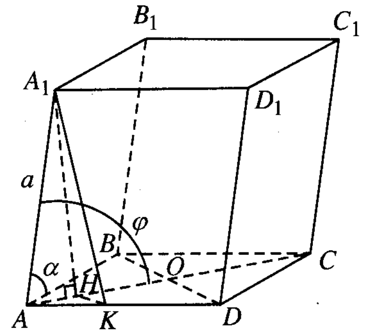
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos 45^o,$$
$$AC^2 = DC^2 + AD^2 - 2DC.\ AD\cos 135^o.$$

Từ đó ta có : $BD^2 - AC^2 = -AB.AD\sqrt{2} + DC.AD.(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}AB.AD$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} - 4 = -2\sqrt{2}AB.AD \Rightarrow AB.AD = \frac{8}{3.2\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}.$$

$$V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = AB.AD\sin 45^o.AA_1 = \frac{4}{3\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{2}.2 = \frac{4}{3}.$$

26. (h.9) Hạ $A_1H \perp AC$ $(H \in AC)$ (*).



Hình 9

Tam giác A_1BD cân (do $A_1B = A_1D$) suy ra $BD \perp A_1O$. Mặt khác $BD \perp AC$ $\Rightarrow BD \perp (A_1AO) \Rightarrow BD \perp A_1H$ (**).

Từ (*) và (**) $\Rightarrow A_1H \perp (ABCD)$.

Đặt $\widehat{A_1AO} = \varphi$. Ta có hệ thức :

$$\cos\alpha = \cos\varphi.\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Thật vậy, hạ $A_1K \perp AD \Rightarrow HK \perp AK$ (định lí ba đường vuông góc)

$$\Rightarrow \cos\varphi.\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{AH}{AA_1}.\frac{AK}{AH} = \frac{AK}{AA_1} = \cos\alpha.$$

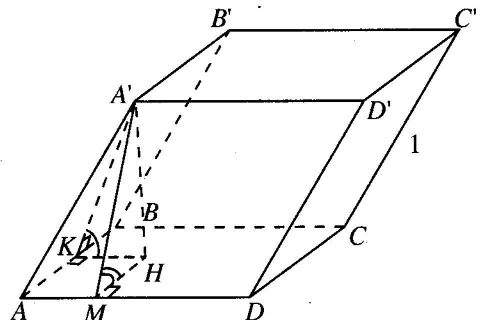
Từ đẳng thức trên ta suy ra : $\cos\varphi = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. Do đó

$$A_1H = a\sin\varphi = a\sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}.$$

$$V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = AB.AD.\sin\alpha.A_1H = a^2\sin\alpha.\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}$$

$$= 2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}.$$

27. (h.10) Kẻ $A'H \perp (ABCD)$ $(H \in (ABCD))$, $HM \perp AD$ $(M \in AD)$, $HK \perp AB$ $(K \in AB)$. Theo định lí ba đường vuông góc, ta có $AD \perp A'M$, $AB \perp A'K$



Hình 10

$$\Rightarrow \widehat{A'MH} = 60^\circ,\quad \widehat{A'KH} = 45^\circ.$$

Đặt $A'H = x$. Khi đó

$$A'M = x : \sin 60^\circ = \frac{2x}{\sqrt{3}},$$

$$AM = \sqrt{AA'^2 - A'M^2} = \sqrt{\frac{3 - 4x^2}{3}} = HK,$$

nhưng $HK = x\cot 45^o = x$,

suy ra $x = \sqrt{\dfrac{3-4x^2}{3}} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AD.AB.x = \sqrt{7}.\sqrt{3}.\sqrt{\dfrac{3}{7}} = 3$.

28. (h.11) Ta dựng khối hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

Khi đó :

$$V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1}.$$

Mặt khác :

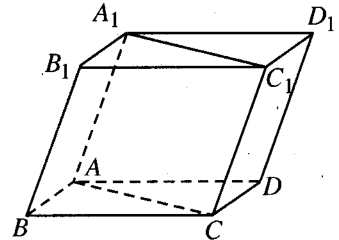
$$V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = S_{ABB_1A_1}.h,$$

ở đây $h = d((CDD_1C_1),(ABB_1A_1))$

$= d(CC_1,(ABB_1A_1)) = 7$

và $S_{ABB_1A_1} = 4$.

Vậy $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{1}{2}.4.7 = 14$.



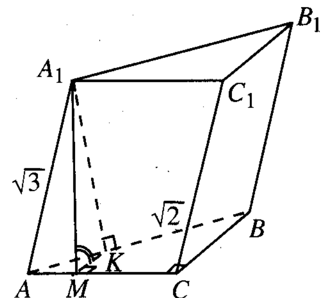
Hình 11

29. (h.12)

Hạ $A_1K \perp AB$ (với $K \in AB$) thì $A_1K \perp (ABC)$. Vì $\widehat{A_1AB}$ nhọn nên K thuộc tia AB.

Kẻ $KM \perp AC$ thì $A_1M \perp AC$ (định lí ba đường vuông góc), do đó $\widehat{A_1MK} = 60^o$,

Giả sử $A_1K = x$, ta có



Hình 12

$AK = \sqrt{A_1A^2 - A_1K^2} = \sqrt{3-x^2}$,

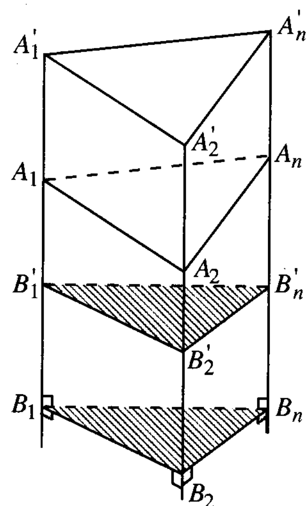
$MK = AK\sin\widehat{KAM} = \sqrt{3-x^2}.\sin 45^o = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3-x^2}$.

Mặt khác, $MK = A_1K.\cot 60^o = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$, suy ra

$$\frac{\sqrt{2.(3-x^2)}}{2} = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Vậy $V_{ABC.A_1B_1C_1} = S_{ABC}.A_1K = \frac{1}{2}AC.CB.A_1K = \frac{3\sqrt{5}}{10}$.

30. *Cách 1.* (h.13)



Hình 13 (với $n = 3$)

Giả sử khối lăng trụ $A_1A_2...A_n.A_1'A_2'...A_n'$ có thiết diện thẳng là $B_1B_2...B_n$. Ta có thể lấy $B_1, B_2, ..., B_n$ sao cho các đoạn thẳng $B_1A_1, B_2A_2, ..., B_nA_n$ đều lớn hơn A_1A_1'.

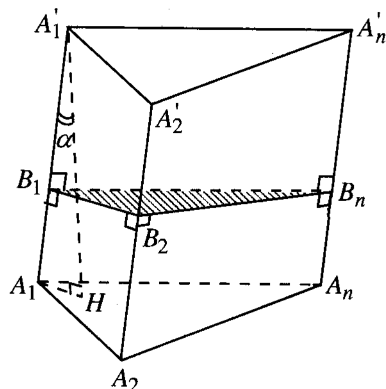
Tịnh tiến khối đa diện $B_1B_2...B_n.A_1A_2...A_n$ theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{A_1A_1'}$, ta được khối đa diện $B_1'B_2'...B_n'.A_1'A_2'...A_n'$. Hai khối này rõ ràng có thể tích bằng nhau (do chúng bằng nhau) và có phần chung là khối đa diện $A_1A_2...A_n.B_1'B_2'...B_n'$. Do đó, thể tích khối lăng trụ $A_1A_2...A_n.A_1'A_2'...A_n'$ bằng thể tích khối lăng trụ đứng $B_1B_2...B_n.B_1'B_2'...B_n'$.

Vậy nếu gọi V là thể tích của khối lăng trụ đã cho thì

$$V = S_{B_1B_2...B_n}.B_1B_1' = S_{B_1B_2...B_n}.A_1A_1'$$

$$(B_1B_1' = A_1A_1' \text{ vì } \overrightarrow{B_1B_1'} = \overrightarrow{A_1A_1'} = \vec{v}).$$

Cách 2. (h.14)



Hình 14 (với $n = 3$)

Hạ $A_1'H \perp (A_1A_2...A_n)$ thì $A_1'H$ bằng chiều cao h của khối lăng trụ.

Khi đó góc giữa mặt phẳng chứa thiết diện thẳng $B_1B_2...B_n$ và mặt phẳng đáy của khối lăng trụ bằng góc giữa hai đường thẳng A_1A_1' và $A_1'H$. Gọi góc này là α thì $h = A_1'H = A_1A_1'\cos\alpha$.

Ta có thiết diện thẳng $B_1B_2...B_n$ là hình chiếu của đa giác đáy $A_1A_2...A_n$ trên mp($B_1B_2...B_n$). Vậy thể tích của khối lăng trụ là :

Ta có $EH \perp P_1P$, mà $P_1P = (\alpha) \cap (SAB)$, $(\alpha) \perp (SAB)$ nên suy ra $EH \perp (SAB) \Rightarrow EH \perp SH$. Mặt khác $SH \perp P_1P \Rightarrow SH \perp (CDP_1P)$ nên SH là đường cao của hình chóp $S.CDP_1P$. Tam giác SKE cân đỉnh S và có góc ở đỉnh bằng 60^o nên nó là tam giác đều. Vậy H là trung điểm của SK, suy ra

$$PP_1 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}KE = \frac{1}{2}SE = \frac{1}{2}.6 = 3.$$

Ta có

$$V_{S.CDP_1P} = \frac{1}{3}S_{CDP_1P}.SH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}\left(CD + P_1P\right).EH.SH$$

$$= \frac{1}{6}(6+3)\frac{6\sqrt{3}}{2}.3 = \frac{27}{2}\sqrt{3}.$$

33. (h.17)

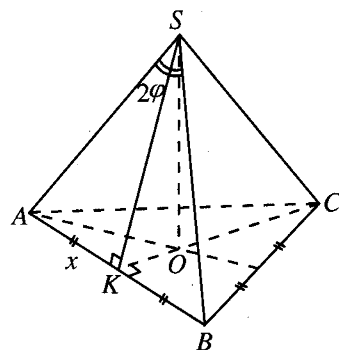
Giả sử O là tâm của tam giác đều ABC. Khi đó $SO \perp (ABC)$ và $SO = h$.

Gọi K là trung điểm của AB. Đặt $AK = x$.

Khi đó $SK = x\cot\varphi$, $OK = x\tan 30^o = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

$$h^2 = SK^2 - OK^2 = \frac{x^2}{3}(3\cot^2\varphi - 1)$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{3h^2}{3\cot^2\varphi - 1},$$



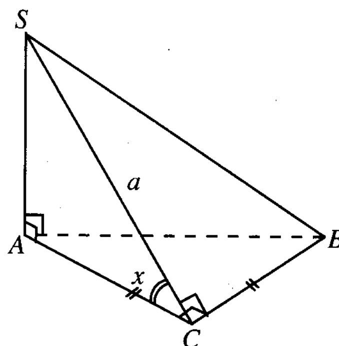
Hình 17

Ta có $S_{ABC} = \frac{AB^2 \sin 60^o}{2} = x^2\sqrt{3}$, suy ra

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.h = \frac{x^2\sqrt{3}}{3}h = \frac{h^3\sqrt{3}}{3\cot^2\varphi - 1}.$$

34. (h.18) Ta có $BC \perp AC$ nên $BC \perp SC$ (định lí ba đường vuông góc), suy ra góc SCA là góc giữa hai mặt phẳng (SCB) và (ABC). Đặt $\widehat{SCA} = x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó : $SA = a\sin x$, $AC = a\cos x$.



Hình 18

$$V_{S.ABC} = \frac{a\sin x}{3}.\frac{a^2\cos^2 x}{2} = \frac{a^3}{6}\sin x.\cos^2 x.$$

Xét hàm số $y(x) = \sin x\cos^2 x$.

Ta có $y'(x) = \cos^3 x - 2\cos x.\sin^2 x = \cos x(\cos^2 x - 2 + 2\cos^2 x) =$

$$= \cos x(3\cos^2 x - 2) = 3\cos x\left(\cos x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(\cos x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Vì $0 < x < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos x\left(\cos x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right) > 0$.

Gọi α là góc sao cho $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm $y(x) = \sin x.\cos^2 x$:

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$y'(x)$		$+$	0	$-$	
$y(x)$		↗		↘	

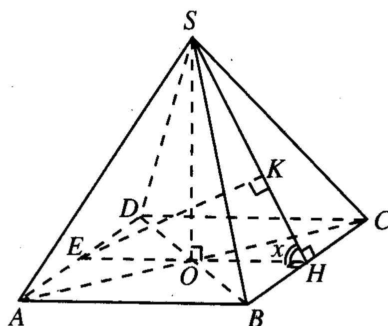
Vậy $V_{S.ABC}$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = \alpha$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

35. (h.19) Giả sử O là tâm của hình vuông $ABCD$. Khi đó $SO \perp (ABCD)$. Gọi EH là đường trung bình của hình vuông $ABCD$ ($E \in AD$, $H \in BC$). Vì $AD \,//\, BC$ nên $AD \,//\, (SBC)$, do đó

$$d(A,(SBC)) = d(E,(SBC)).$$

Kẻ $EK \perp SH$. Dễ thấy $EK \perp (SBC)$ suy ra $EK = d\big(A,(SBC)\big) = 2a$.

Ta có $BC \perp SH$, $BC \perp OH \Rightarrow \widehat{SHO}$ là góc giữa mặt bên (SBC) và mặt phẳng đáy. Đặt $\widehat{SHO} = x\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó :



Hình 19

$$EH = \frac{2a}{\sin x}, OH = \frac{a}{\sin x}, \; SO = \frac{a}{\sin x}\tan x = \frac{a}{\cos x}.$$

Vậy : $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{4a^3}{3\cos x\sin^2 x}$.

Từ đó $V_{S.ABCD}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $y(x) = \cos x.\sin^2 x$ đạt giá trị lớn nhất. Ta có

$$y'(x) = -\sin^3 x + 2\sin x\cos^2 x = \sin x(2\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= \sin x(2 - 3\sin^2 x) = 3\sin x\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sin x\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sin x\right).$$

Vì $0 < x < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin x\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sin x\right) > 0$.

Gọi α là góc sao cho $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}},\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y(x) = \cos x.\sin^2 x$:

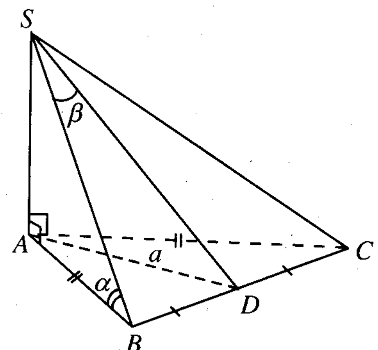
x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$y'(x)$		+	0	–	
$y(x)$		↗		↘	

Vậy $V_{S.ABCD}$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = \alpha$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

36. (h.20)

AB là hình chiếu của SB trên mp(ABC) nên $\widehat{SBA} = \alpha$. Dễ thấy $BD \perp (SAD)$ nên hình chiếu của SB trên mp(SAD) là SD $\Rightarrow \widehat{BSD} = \beta$.

Do SAB và SDB là các tam giác vuông nên ta có $SB = \frac{BD}{\sin\beta}$, $SB = \frac{AB}{\cos\alpha}$, suy ra



Hình 20

$$\frac{AB^2}{\cos^2\alpha} = \frac{BD^2}{\sin^2\beta} = \frac{AB^2 - BD^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} = \frac{a^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$$

$$\Rightarrow BD = \frac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}},$$

$$SD = BD\cot\beta = \frac{a\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}},$$

$$SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}.$$

Vậy : $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA$

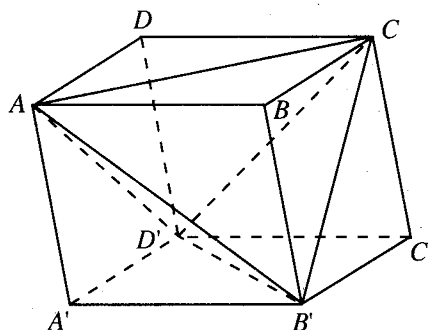
$$= \frac{1}{3}.a.\frac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}.\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}$$

$$= \frac{a^3\sin\alpha.\sin\beta}{3(\cos^2\alpha - \sin^2\beta)}.$$

37. (h.21) Ta có

$$V_{ACB'D'} = V - (V_{A.A'B'D'} + V_{C.C'B'D'} + V_{B'.ABC} + V_{D'.ACD})$$

Các khối chóp $A.A'B'D'$, $C.C'B'D'$, $B'.ABC$ và $D'.ACD$ có diện tích đáy bằng một nửa diện tích đáy của khối hộp và đều có chiều cao bằng chiều cao của khối hộp nên chúng có thể tích bằng nhau và cụ thể, mỗi khối đó có thể tích bằng $\frac{1}{6}V$.



Hình 21

Vậy : $V_{ACB'D'} = V - 4.\frac{1}{6}V = \frac{1}{3}V$.

38. *Cách 1.*

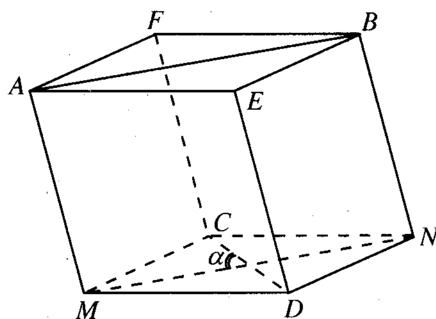
Dựng hình hộp $AEBF.MDNC$ (gọi là hình hộp ngoại tiếp tứ diện $ABCD$) (h.22).

Vì $(AEBF)$ // $(MDNC)$ nên chiều cao của hình hộp bằng khoảng cách d giữa AB và CD.

Theo bài 37 ta có :

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}V_{\text{hộp}} = \frac{1}{3}S_{MDNC}.d$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}MN.CD\sin\alpha.d = \frac{1}{6}AB.CD.d\sin\alpha.$$



Hình 22

Cách 2. (h.23)

Dựng hình bình hành $ABCE$. Khi đó :

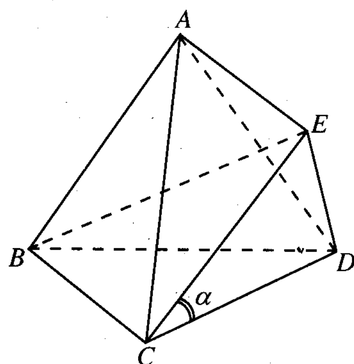
$V_{A.BCD} = V_{E.BCD}$ (do $AE \,//\, (BCD)$) (1)

$V_{E.BCD} = V_{B.ECD}$ (2)

$V_{B.ECD} = \frac{1}{3}S_{ECD}.d\left(B,(CDE)\right)$ (3)

$S_{ECD} = \frac{1}{2}CE.CD.\sin\widehat{ECD}$

$= \frac{1}{2}AB.CD\sin\alpha$ (4)



Hình 23

$d(B,(CDE)) = d(AB,CD)$ (do $AB \,//\, (CDE)$). (5)

Từ (1), (2), (3), (4), (5) suy ra :

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.d\sin\alpha.$$

39. (h.24)

Ta có $AB' \perp SB, AB' \perp CB$ (do $CB \perp (SAB)$)

$\Rightarrow AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SC.$ (1)

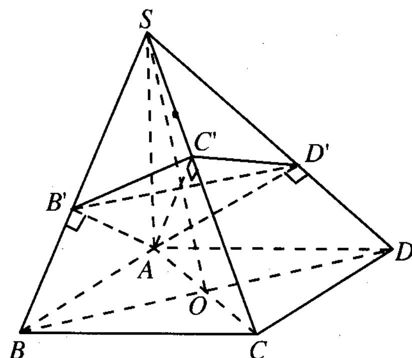
Tương tự $AD' \perp SC.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (AB'C'D')$

$\Rightarrow SC \perp AC'.$

Do tính đối xứng, ta có

$$V_{S.AB'C'D'} = 2V_{S.AB'C'}.$$



Hình 24

Ta có :

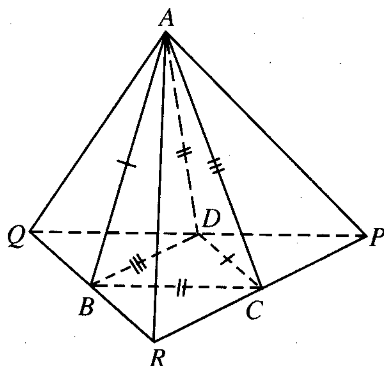
$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{SB'.SB}{SB^2}.\frac{SC'.SC}{SC^2} =$$

$$= \frac{SA^2}{SB^2}.\frac{SA^2}{SC^2} = \frac{4a^2}{5a^2}.\frac{4a^2}{6a^2} = \frac{8}{15}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}\frac{a^2}{2}.2a = \frac{a^3}{3} \Rightarrow V_{S.AB'C'} = \frac{8}{15}.\frac{a^3}{3} = \frac{8a^3}{45}$$

$$\Rightarrow V_{S.AB'C'D'} = \frac{16a^3}{45}.$$

40. (h.25) Dựng tứ diện $APQR$ sao cho B, C, D lần lượt là trung điểm của các cạnh QR, RP, PQ.



Hình 25

Ta có $AD = BC = \frac{1}{2}PQ$ mà D là trung điểm của PQ nên $AQ \perp AP$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $AQ \perp AR$, $AR \perp AP$.

Dễ thấy

$$V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{APQR} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}.AP.AQ.AR \ (*)$$

Xét các tam giác vuông APQ, AQR, ARP, ta có

$$AP^2 + AQ^2 = 4c^2, AQ^2 + AR^2 = 4a^2, AR^2 + AP^2 = 4b^2.$$

Từ đó suy ra :

$$AP = \sqrt{2}.\sqrt{-a^2 + b^2 + c^2}, AQ = \sqrt{2}\sqrt{a^2 - b^2 + c^2},$$

$$AR = \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}.$$

Vậy từ (*) ta suy ra :

$$V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2).(a^2 - b^2 + c^2).(a^2 + b^2 - c^2)}.$$

41. (h.26) *Cách 1.*

$AC \ // \ A'C' \Rightarrow AC \ // \ (BC'A')$. Gọi I là trung điểm của AC thì

$$d(A,(BC'A')) = d(I,(BC'A')).$$

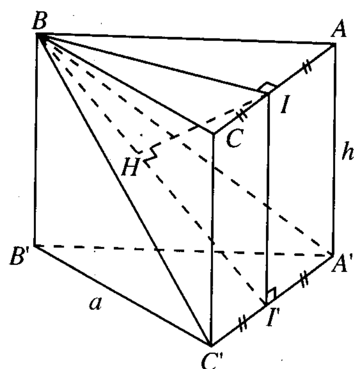
Gọi I' là trung điểm của $A'C'$ thì rõ ràng $BI' \perp A'C'$, mặt khác $II' \perp A'C'$ nên

$$A'C' \perp (IBI').$$

Vậy khi ta hạ $IH \perp BI'$ thì $A'C' \perp IH$.

Từ đó suy ra $IH \perp (BC'A')$, tức là

$$d(A,(BC'A')) = IH.$$



Hình 26

Ta có : $IH = \dfrac{IB.II'}{BI'} = \dfrac{a\dfrac{\sqrt{3}}{2}.h}{\sqrt{3\dfrac{a^2}{4} + h^2}} = \dfrac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}$,

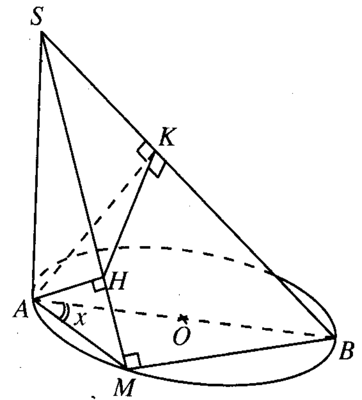
$$S_{BC'A'} = \frac{1}{2}BI'.C'A' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2}{4} + h^2}.a = \frac{1}{4}a\sqrt{3a^2 + 4h^2}.$$

Vậy $\quad V_{A.BC'A'} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{4}a\sqrt{3a^2 + 4h^2}.\dfrac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3a^2 + 4h^2}} = \dfrac{\sqrt{3}a^2h}{12}$.

Cách 2. $V_{A.BC'A'} = V_{B.AA'C'} = \dfrac{1}{2}.V_{B.AA'C'C} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}.V_{ABC.A'B'C'}$

$$= \frac{1}{3}.S_{ABC}.h = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.h$$

42. (h.27)



Hình 27

$MB \perp AM$, $MB \perp SA$

$\Rightarrow MB \perp (SAM) \Rightarrow MB \perp AH$, (1)

$SB \perp (AKH) \Rightarrow SB \perp AH$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SMB)$

$\Rightarrow AH \perp SM$, $AH \perp HK$.

$$V_{S.AHK} = \frac{1}{3}S_{AHK}.SK = \frac{1}{6}AH.KH.SK.$$

Vì SK cố định nên :

$V_{S.AHK}$ max $\Leftrightarrow (AH.KH)$ max $\Leftrightarrow (AH^2.KH^2)$max $\Leftrightarrow AH^2 = KH^2 = \dfrac{AK^2}{2}$

(vì $AH^2 + HK^2 = AK^2$ không đổi). Vậy ta chỉ cần xác định vị trí điểm M thoả mãn điều kiện $AH^2 = \dfrac{AK^2}{2}$. (*)

Đặt $\widehat{MAB} = x$, $SA = h$, $AB = 2R$. Ta có

$$AK^2 = \frac{SA^2.AB^2}{SB^2} = \frac{4R^2h^2}{4R^2 + h^2},$$

$AM = 2R\cos x$,

$$AH^2 = \frac{SA^2.AM^2}{SM^2} = \frac{4h^2R^2\cos^2 x}{h^2 + 4R^2\cos^2 x}.$$

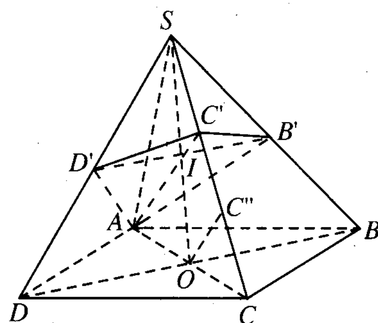
Từ (*) ta suy ra : $\cos^2 x = \dfrac{h^2}{2(h^2 + 2R^2)} < \dfrac{1}{2}$.

Từ đây ta xác định được x, tức là xác định được vị trí điểm M (có hai vị trí của điểm M).

Từ $\cos^2 x < \dfrac{1}{2}$ suy ra $\cos x < \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^{\circ} \Rightarrow x > 45^{\circ} \Rightarrow \overset{\frown}{BM} > \overset{\frown}{AM}$.

43. (h.28) Dễ thấy AC', $B'D'$ và SO ($O = AC \cap BD$) đồng quy tại I và I là trung điểm của SO.

Kẻ $OC'' // AC'$. Dễ thấy $SC' = C'C'' = C''C$.



Hình 28

Vậy $\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{3}$. Ta có

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{12}.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có :

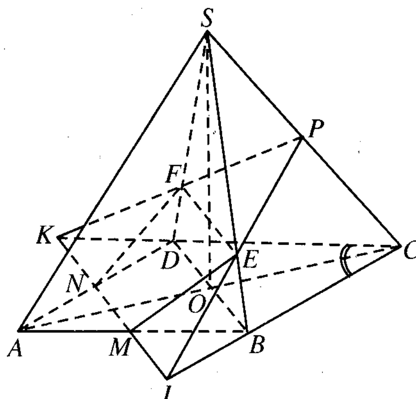
$$\frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{12}.$$

Vậy $\dfrac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{V_{S.AB'C'} + V_{S.AC'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{6}$.

44. (h.29). Giả sử đường thẳng MN cắt CD và BC lần lượt tại K và I.

Dễ thấy : $CK = \dfrac{3}{2}CD$, $CI = \dfrac{3}{2}CB$,

$d(P,(ABC)) = \dfrac{1}{2}d\big(S,(ABC)\big)$.



Hình 29

$$V_{P.CIK} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}CI.CK\sin\widehat{ICK}.d\big(P,(ABC)\big)$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}CB.\frac{3}{2}CD\sin\widehat{BCD}.\frac{1}{2}d\big(S,(ABC)\big)$$

$$= \frac{9}{16}\left(\frac{1}{3}CB.CD\sin\widehat{BCD}.d\big(S,(ABC)\big)\right)$$

$$\Rightarrow V_{P.CIK} = \frac{9}{16}V_{S.ABCD}.$$

Ta có : $\dfrac{V_{I.BEM}}{V_{I.CPK}} = \dfrac{IB}{IC}.\dfrac{IE}{IP}.\dfrac{IM}{IK} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{18}$

$$\Rightarrow V_{I.BEM} = \frac{1}{18}V_{I.CPK} = \frac{1}{18}V_{P.CIK} = \frac{1}{32}V_{S.ABCD}.$$

Tương tự, ta cũng có $V_{K.NDF} = \dfrac{1}{18}V_{P.CIK} = \dfrac{1}{32}V_{S.ABCD}$.

Vậy nếu gọi V_2 là thể tích của phần khối chóp giới hạn bởi mp(MNP) với mặt phẳng đáy thì :

$$V_2 = V_{P.CIK} - (V_{I.BEM} + V_{K.NDF})$$
$$= \frac{9}{16}V_{S.ABCD} - \left(\frac{1}{32}V_{S.ABCD} + \frac{1}{32}V_{S.ABCD}\right)$$
$$= \frac{9}{16}V_{S.ABCD} - \frac{1}{16}V_{S.ABCD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}.$$

Vậy phần còn lại, tức là phần của khối chóp nằm trên mp(MNP), có thể tích V_1 cũng bằng $\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}$. Do đó $V_1 = V_2$.

45. (h.30) Kẻ $MN // CD$ ($N \in SD$) thì hình thang $ABMN$ là thiết diện của khối chóp khi cắt bởi mp(ABM). Ta có

$$\frac{V_{S.ANB}}{V_{S.ADB}} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ANB} = \frac{1}{2}V_{S.ADB} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD}.$$

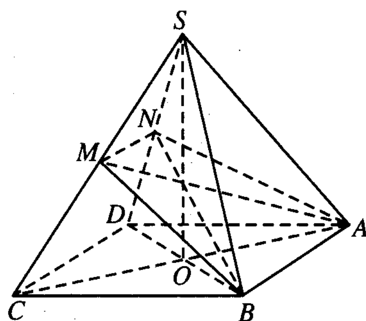
$$\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.BCD}} = \frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow V_{S.BMN} = \frac{1}{4}V_{S.BCD} = \frac{1}{8}V_{S.ABCD}.$$

Vậy $V_{S.ABMN} = V_{S.ANB} + V_{S.BMN}$

$$= \frac{3}{8}V_{S.ABCD}.$$

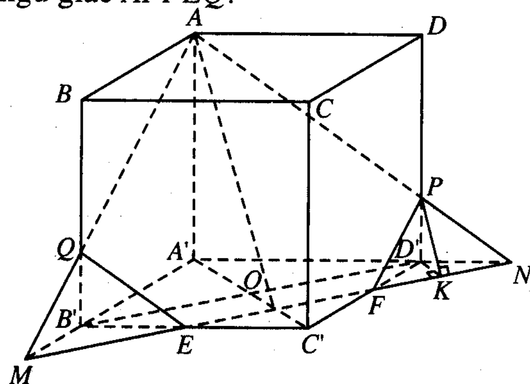
Do đó : $\dfrac{V_{S.ABMN}}{V_{ABMNCD}} = \dfrac{3}{5}$.



Hình 30

46. (h.31)

a) Đường thẳng EF cắt $A'D'$ tại N, cắt $A'B'$ tại M, AN cắt DD' tại P, AM cắt BB' tại Q. Vậy thiết diện là ngũ giác $APFEQ$.



Hình 31

b) Đặt $V = V_{ABCD.A'B'C'D'}$,

$V_1 = V_{ABCDC'QEFP}$,

$V_2 = V_{AQEFP.B'A'D'}$,

$V_3 = V_{A.MA'N}$,

$V_4 = V_{PFD'N}$, $V_5 = V_{QMB'E}$.

Dễ thấy $V_4 = V_5$ (do tính đối xứng của hình lập phương),

$$V_3 = \frac{1}{6}AA'.A'M.A'N = \frac{1}{6}a.\frac{3a}{2}.\frac{3a}{2} = \frac{3a^3}{8},$$

$$V_4 = \frac{1}{6}PD'.D'F.D'N = \frac{1}{6}.\frac{a}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^3}{72},$$

$$V_2 = V_3 - 2V_4 = \frac{3a^3}{8} - \frac{2a^3}{72} = \frac{25a^3}{72},$$

$$V_1 = V - V_2 = a^3 - \frac{25a^3}{72} = \frac{47}{72}a^3.$$

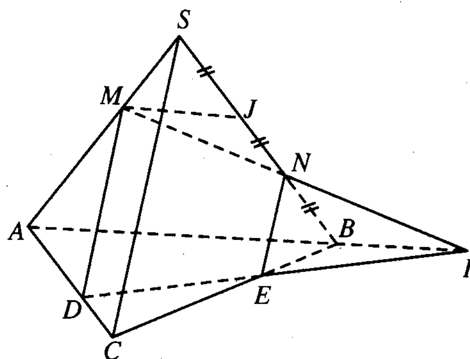
Mặt phẳng (AEF) chia khối lập phương thành hai phần lần lượt có thể tích là $V_1 = \frac{47}{72}a^3$, $V_2 = \frac{25a^3}{72}$. Vậy : $\frac{V_1}{V_2} = \frac{47}{25}$.

47. (h.32) Kéo dài MN cắt AB tại I. Kẻ MD song song với SC ($D \in AC$). DI cắt CB tại E. Vậy tứ giác $MNED$ là thiết diện của khối chóp khi cắt bởi mp(α). Ta có

$$\frac{V_{A.MDI}}{V_{A.SCB}} = \frac{AM}{AS}.\frac{AD}{AC}.\frac{AI}{AB}$$

$$= \frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3} = \frac{16}{27}$$

$$\Rightarrow V_{A.MDI} = \frac{16}{27}V_{S.ABC}$$



Hình 32

$$\left(BI = MJ, MJ = \frac{1}{3}AB \Rightarrow BI = \frac{1}{3}AB, AI = \frac{4}{3}AB\right).$$

$$\frac{V_{I.BNE}}{V_{I.AMD}} = \frac{IB}{IA}.\frac{IN}{IM}.\frac{IE}{ID} = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow V_{I.BNE} = \frac{1}{16}V_{A.MDI} = \frac{1}{27}V_{S.ABC}.$$

Gọi $V_1 = V_{AMD.BNE}$, V_2 là phần còn lại thì

$$V_1 = V_{A.MDI} - V_{I.BNE} = \frac{15}{27}V_{S.ABC} = \frac{5}{9}V_{S.ABC}$$

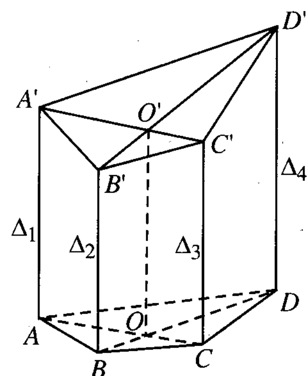
nên $V_2 = V_{S.ABC} - V_1 = \frac{4}{9}V_{S.ABC}$ và $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{4}$.

48. (h.33)

Gọi $O = AC \cap BD$, $O' = A'C' \cap B'D'$.

Do $DD' \,//\, OO'$ nên dễ thấy

$$\frac{d(D', (ABC))}{d(O', (ABC))} = \frac{DD'}{OO'}, \frac{d(D, (A'B'C'))}{d(O, (A'B'C'))} = \frac{DD'}{OO'}.$$



Hình 33

Vậy :

$$\left.\begin{aligned} V_{D'.ABC} &= \frac{DD'}{OO'}V_{O'.ABC} \\ V_{D.A'B'C'} &= \frac{DD'}{OO'}V_{O.A'B'C'} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Đặt $h = d(BB', (ACC'A'))$. Ta có $h = d(B, (ACC'A'))$ và

$$V_{O'.ABC} = V_{B.O'AC} = \frac{1}{3}h.S_{O'AC}, \qquad (2)$$

$$V_{O.A'B'C'} = V_{B'.OA'C'} = \frac{1}{3}h.S_{OA'C'}. \qquad (3)$$

Đặt $d = d(AA', CC')$ thì $S_{O'AC} = S_{OA'C'} = \frac{1}{2}OO'.d$ (4)

($S_{O'AC} = S_{AOO'} + S_{COO'} = \frac{1}{2}OO'\left(d(A,OO') + d(C,OO')\right) = \frac{1}{2}OO'.d$; tương tự $S_{OA'C'} = \frac{1}{2}OO'.d$).

Từ (2), (3), (4) suy ra $V_{O'.ABC} = V_{O.A'B'C'}$. (5)

Từ (1) và (5) ta suy ra : $V_{D'.ABC} = V_{D.A'B'C'}$.

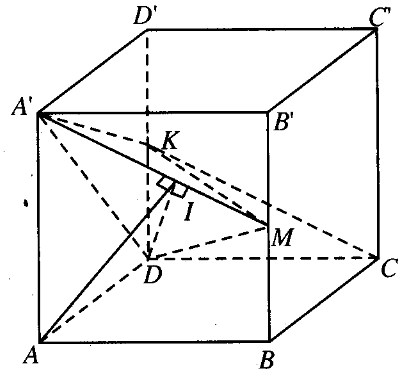
49. (h.34) Gọi M là trung điểm của BB'.

Ta có $A'M$ // KC nên

$$d(CK, A'D) = d(CK, (A'MD))$$
$$= d(K, (A'MD)).$$

Đặt $d(CK, A'D) = x$. Ta có

$V_{A'.MDK} = V_{K.A'MD} = \frac{1}{3}S_{A'MD}.x$. (1)



Hình 34

Mặt khác $V_{A'.MDK} = V_{M.A'DK}$

$$= \frac{1}{3}S_{A'DK}.d(M,(A'DK)) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a.\frac{1}{2}a\right).a = \frac{a^3}{12}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $S_{A'MD}.x = \frac{a^3}{4}$. (3)

Hạ $DI \perp A'M \Rightarrow AI \perp A'M$

$$\Rightarrow AI.\ A'M = AA'.d(M, AA') = a^2 \Rightarrow AI = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

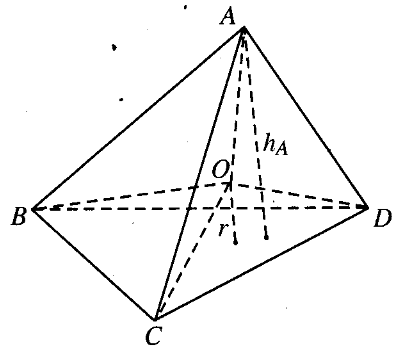
$$\Rightarrow DI^2 = DA^2 + AI^2 = a^2 + \frac{4a^2}{5} = \frac{9a^2}{5} \Rightarrow DI = \frac{3a}{\sqrt{5}}.$$

Vậy $S_{A'MD} = \frac{1}{2}DI.A'M = \frac{1}{2}\frac{3a}{\sqrt{5}}.\frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{3a^2}{4}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $x = \frac{a}{3}$.

50. (h.35) Khối tứ diện $ABCD$ được phân chia thành bốn khối tứ diện $OBCD$, $OCAD$, $OABD$, $OABC$. Từ đó dễ thấy rằng :

$$\frac{V_{O.BCD}}{V_{ABCD}} = \frac{r}{h_A}, \frac{V_{O.CAD}}{V_{ABCD}} = \frac{r}{h_B},$$



Hình 35

$$\frac{V_{O.ABD}}{V_{ABCD}} = \frac{r}{h_C}, \frac{V_{O.ABC}}{V_{ABCD}} = \frac{r}{h_D}.$$

Suy ra :

$$\frac{V_{O.BCD} + V_{O.CAD} + V_{O.ABD} + V_{O.ABC}}{V_{ABCD}} = r\left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{V_{ABCD}}{V_{ABCD}} = r\left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}.$$

51. Gọi hình lăng trụ đều đã cho là $\mathscr{H}$. Khi đó, dễ thấy tổng các khoảng cách từ một điểm nằm trong $\mathscr{H}$ đến hai mặt đáy của nó luôn bằng chiều cao h của $\mathscr{H}$.

Giả sử I là một điểm trong nào đó của $\mathscr{H}$. Dựng qua I một mặt phẳng (P) vuông góc với cạnh bên của $\mathscr{H}$, ta được thiết diện thẳng $A_1A_2\ldots A_n$ của $\mathscr{H}$. Khi đó, $A_1 A_2\ldots A_n$ là một đa giác đều bằng đa giác đáy của $\mathscr{H}$ (do $\mathscr{H}$ là lăng trụ đều).

Từ I ta kẻ đường $IH_1 \perp A_1A_2,\ IH_2 \perp A_2A_3, \ldots,\ IH_n \perp A_nA_1$.

Do thiết diện thẳng vuông góc với các mặt bên nên từ đó dễ dàng suy ra : $IH_1, IH_2, \ldots, IH_n$ lần lượt vuông góc với các mặt bên của hình lăng trụ. Đặt $IH_1 = h_1, IH_2 = h_2, \ldots, IH_n = h_n$ và a là độ dài cạnh đáy của lăng trụ. Gọi S là diện tích một mặt đáy thì S cũng là diện tích của $A_1A_2\ldots A_n$. Vậy

$$S = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 + \ldots + \frac{1}{2}ah_n = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2 + \ldots + h_n)$$

$$\Rightarrow h_1 + h_2 + \ldots + h_n = \frac{2S}{a}.$$

Vậy tổng các khoảng cách từ I đến các mặt của lăng trụ là không đổi. Tổng này bằng $h + \frac{2S}{a}$.

52. (h.36)

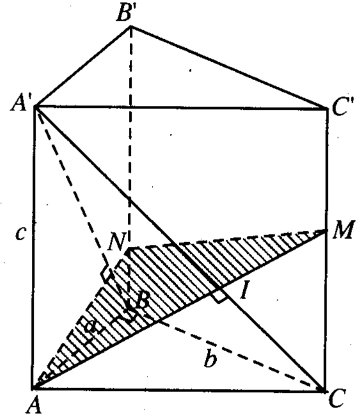
a) Trong mp($AA'C'C$), dựng đường thẳng qua A vuông góc với CA' lần lượt cắt CA' và CC' tại I và M.

Vì $AC = \sqrt{a^2 + b^2} \leq c$ nên $IC \leq IA'$, do đó M phải thuộc đoạn CC'.

Bây giờ ta tìm giao điểm N của (P) và BB'. Dễ thấy $AN \perp BC, AN \perp CA'$

$\Rightarrow AN \perp A'B$. Vậy để tìm N, ta kẻ qua A (trong mp($A'B'BA$)) đường thẳng vuông góc với $A'B$ cắt $B'B$ tại N.

Vậy thiết diện là tam giác AMN.



Hình 36

b) Ta có : $V_{A'.AMN} = V_{M.AA'N} = V_{M.AA'B} = V_{C.A'AB} = \frac{1}{6}abc$

(do $NB \,//\, AA'$, $MC \,//\, AA'$).

Mặt khác :

$$V_{A'.AMN} = \frac{1}{3}.S_{AMN}.A'I \Rightarrow S_{AMN} = \frac{3V_{A'.AMN}}{A'I} = \frac{abc}{2A'I}.$$

Xét tam giác vuông $A'AC$ ta có :

$$A'I.A'C = AA'^2 = c^2 \Rightarrow A'I = \frac{c^2}{A'C} = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

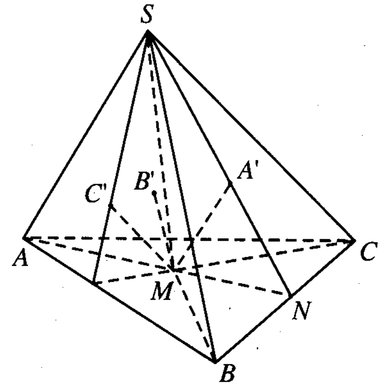
Vậy $$S_{AMN} = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2c}.$$

53. (h.37)

a) Gọi N là giao điểm của MA và BC. Khi đó S, A', N thẳng hàng vì chúng cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SA, $A'M$).

Gọi MM_1 và AA_1 là các đường vuông góc hạ từ M và A xuống mp(SBC) thì :

$$\frac{MM_1}{AA_1} = \frac{MN}{AN} = \frac{MA'}{SA}.$$



Hình 37

Vậy $\dfrac{V_{M.BCS}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{V_{M.BCS}}{V_{A.BCS}} = \dfrac{\frac{1}{3}S_{BCS}.MM_1}{\frac{1}{3}S_{BCS}.AA_1} = \dfrac{MM_1}{AA_1} = \dfrac{MA'}{SA}$.

b) Chứng minh tương tự như câu a), ta có :

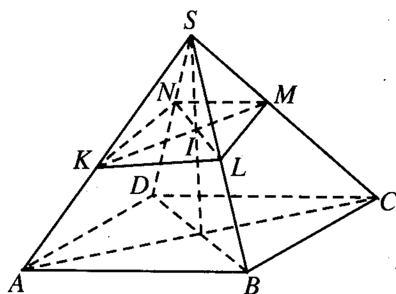
$$\frac{V_{M.CAS}}{V_{S.ABC}} = \frac{MB'}{SB}, \frac{V_{M.ABS}}{V_{S.ABC}} = \frac{MC'}{SC}.$$

Vậy :

$$\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} = \frac{V_{M.BCS} + V_{M.CAS} + V_{M.ABS}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{S.ABC}}{V_{S.ABC}} = 1.$$

54. (h.38)

a) Dễ thấy các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD đều có diện tích bằng nhau và bằng nửa diện tích S của hình bình hành $ABCD$; các hình chóp $S.ABC$, $S.ACD$, $S.ABD$, $S.BCD$ có chiều cao bằng nhau và bằng chiều cao h của hình chóp $S.ABCD$. Vậy



Hình 38

$$V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = V_{S.ABD} = V_{S.BCD}$$
$$= \frac{V_{S.ABCD}}{2} = \frac{V}{2}.$$

b) Ta có : $\dfrac{V_{S.KLM}}{\frac{V}{2}} = \dfrac{SK}{SA}.\dfrac{SL}{SB}.\dfrac{SM}{SC}$, $\dfrac{V_{S.KMN}}{\frac{V}{2}} = \dfrac{SK}{SA}.\dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SN}{SD}$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.KLMN}}{\frac{V}{2}} = \frac{SK}{SA}.\frac{SL}{SB}.\frac{SM}{SC} + \frac{SK}{SA}.\frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD}. \quad (1)$$

Tương tự

$$\frac{V_{S.KLMN}}{\frac{V}{2}} = \frac{SL}{SB}.\frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD} + \frac{SL}{SB}.\frac{SN}{SD}.\frac{SK}{SA}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{SK}{SA}\cdot\frac{SL}{SB}\cdot\frac{SM}{SC}+\frac{SK}{SA}\cdot\frac{SM}{SC}\cdot\frac{SN}{SD}=\frac{SL}{SB}\cdot\frac{SM}{SC}\cdot\frac{SN}{SD}+\frac{SL}{SB}\cdot\frac{SN}{SD}\cdot\frac{SK}{SA}.$$

Nhân hai vế với $\frac{SA}{SK}\cdot\frac{SB}{SL}\cdot\frac{SC}{SM}\cdot\frac{SD}{SN}$, ta được đẳng thức phải chứng minh.



Ôn tập chương I

Bài tập tự luận

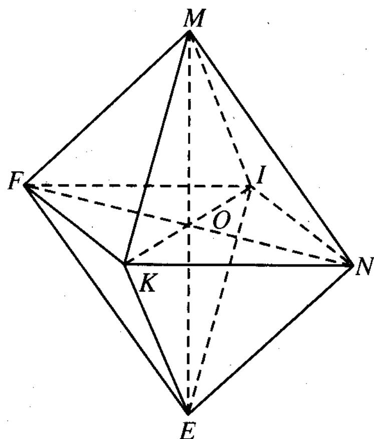
55. Với mỗi điểm M bất kì khác I, ta gọi M' là ảnh của M qua f, khi đó M và M' không trùng nhau. Vì hợp thành của f với chính nó là phép đồng nhất nên f biến M' thành M, vậy f biến đoạn thẳng MM' thành đoạn thẳng $M'M$. Từ đó suy ra f biến trung điểm của đoạn thẳng MM' thành chính nó và vì vậy, theo giả thiết, trung điểm của MM' phải là điểm I. Vậy f là phép đối xứng qua tâm I.

56. Các cạnh bên của hình chóp cụt đều phải đồng quy tại một điểm, ta gọi là S. Giả sử một cạnh bên của hình chóp cụt là A_1A_2 với A_1 là đỉnh của mặt đáy $Đ_1$ và A_2 là đỉnh của mặt đáy $Đ_2$. Khi đó, phép vị tự tâm S tỉ số $k=\frac{SA_2}{SA_1}$ sẽ biến $Đ_1$ thành $Đ_2$. (Chú ý rằng kết quả này đúng với mọi hình chóp cụt bất kì, không cần phải là hình chóp cụt đều).

Trong trường hợp các mặt đáy $Đ_1$ và $Đ_2$ là các đa giác đều có số cạnh là số chẵn, ta còn có thêm một phép vị tự thứ hai được xác định như sau : Gọi O_1 và O_2 lần lượt là tâm của $Đ_1$ và $Đ_2$ và S' là điểm sao cho $\overrightarrow{S'O_2}=-k\overrightarrow{S'O_1}$, với $k=\frac{SA_2}{SA_1}\cdot$ Khi đó, dễ thấy phép vị tự tâm S' tỉ số $-k$ sẽ biến $Đ_1$ thành $Đ_2$.

57. (h.39) Gọi độ dài cạnh của khối bát diện đều là b. Khối bát diện đều có thể phân chia thành hai khối chóp tứ giác đều mà các cạnh bằng b : $M.FKNI$ và $E.FKNI$.

Gọi MO là đường cao của khối chóp $M.FKNI$ thì ON bằng một nửa đường chéo của đáy.



Hình 39

Ta có :

$$MO^2 = MN^2 - ON^2 = b^2 - \left(b\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{2}$$

$$\Rightarrow MO = \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

$$V_{M.FKNI} = \frac{1}{3}S_{FKNI}.MO = \frac{1}{3}b^2.b\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{b^3\sqrt{2}}{6}.$$

Như ta đã biết, b bằng một nửa đường chéo của một mặt của khối lập phương ngoại tiếp. Do đó $b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $V_{M.FKNI} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3.\frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3}{12}.$

Vậy thể tích khối bát diện đều là :

$$V = 2V_{M.FKNI} = \frac{a^3}{6}.$$

58. (h.40)

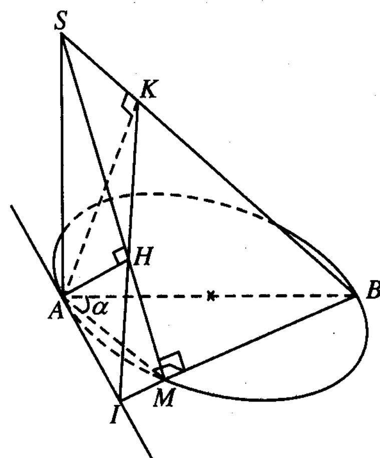
a) Ta có $BM \perp AM$ (vì M nằm trên đường tròn đường kính AB) và $BM \perp SA$ (do $SA \perp (P)$), suy ra $BM \perp (SAM) \Rightarrow BM \perp AH$.

Mặt khác $AH \perp SM$, suy ra $AH \perp SB$.

Theo giả thiết, ta lại có $AK \perp SB$.

Vậy $SB \perp (KHA)$.

b) Vì $SB \perp (KHA)$ nên $SB \perp AI$, mặt khác $SA \perp AI$ nên $AI \perp AB$, mà AI thuộc mp(P), suy ra AI là tiếp tuyến của đường tròn đã cho tại điểm A.



Hình 40

c) *Cách 1*. Ta có :

$$\frac{V_{S.KHA}}{V_{S.BMA}} = \frac{SK}{SB}.\frac{SH}{SM} = \frac{SK.SB}{SB^2}.\frac{SH.SM}{SM^2} = \frac{SA^4}{SB^2.SM^2}$$

$$= \frac{(2R)^4}{(4R^2 + 4R^2).(4R^2 + AM^2)} = \frac{2R^2}{4R^2 + 4R^2\cos^2\alpha} = \frac{1}{2(1 + \cos^2\alpha)},$$

$$V_{S.BMA} = \frac{1}{3}S_{BMA}.SA = \frac{1}{6}AM.BM.SA = \frac{1}{6}2R\cos\alpha.2R\sin\alpha.2R$$

$$= \frac{2R^3}{3}\sin 2\alpha = \frac{2R^3}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R^3\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $V_{S.KHA} = \dfrac{1}{2(1+\cos^2\alpha)}.\dfrac{R^3\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{2\left(1+\dfrac{3}{4}\right)}.\dfrac{R^3\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2R^3\sqrt{3}}{21}.$

Cách 2. Dễ thấy $V_{S.KHA} = \frac{1}{3}S_{KHA}.SK.$

Dùng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có thể tính được SK, AH, AK, HK (với chú ý rằng tam giác KHA vuông ở H) theo R. Từ đó tính được thể tích khối chóp $S.KHA$.

59. (h.41) Giả sử hình lập phương $A'HB'O.GEFC'$ thoả mãn điều kiện của bài toán và điểm E thuộc mp(ABC). Khi đó

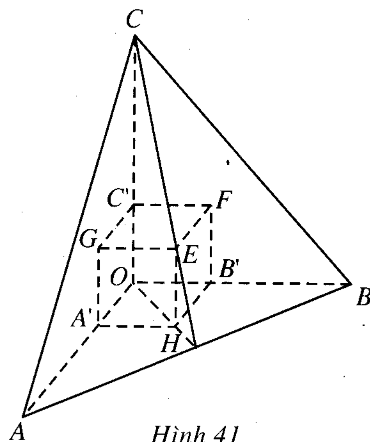
$$V_{O.ABC} = V_{E.OAB} + V_{E.OBC} + V_{E.OCA}.$$

Các khối chóp $E.OAB$, $E.OBC$, $E.OCA$ có chiều cao x bằng cạnh của khối lập phương nói trên. Bởi vậy ta có :

$$\frac{1}{6}abc = \frac{1}{3}x\left(\frac{ab}{2}+\frac{bc}{2}+\frac{ca}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{abc}{ab+bc+ca}.$$

Vậy : $V_{\text{lập phương}} = x^3 = \dfrac{a^3b^3c^3}{(ab+bc+ca)^3}.$



Hình 41

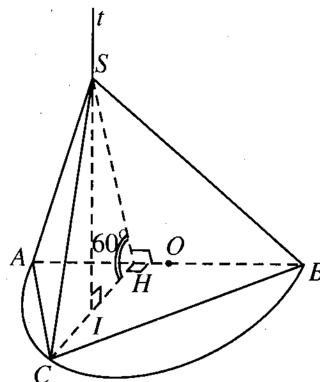
60. (h.42) 1. a) Do các tam giác ASB và ACB vuông nên :

$SH^2 = AH.BH$, $CH^2 = AH.BH$.

Vậy $SH = CH$. Mặt khác $SI \perp CH$ và $CI = IH$ nên $SC = SH$.

Vậy tam giác SCH đều, suy ra $\widehat{SHI} = 60^o$.

Mặt khác, ta có $AB \perp HI$, $AB \perp SH$ $\Rightarrow \widehat{SHI}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC). Vậy mặt phẳng (SAB) qua AB cố định và tạo với mặt phẳng cố định (ABC) một góc 60^o nên nó phải cố định.



Hình 42

3. *Cách 1*. Do $BC \perp (SAB)$ nên SB là hình chiếu của SC trên mp(SAB) và do đó $\widehat{BSC} = x$. Ta có

$$V = V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a^2SA \ (a = AB = BC),$$

$$V' = V_{S.AB'C'D'} = \frac{1}{3}S_{AB'C'D'}.SC'.$$

Do $ABCD$ là hình vuông nên dễ dàng suy ra $SB' = SD' \Rightarrow B'D' \parallel BD$.

Từ đó dễ thấy $B'D' \perp (SAC) \Rightarrow B'D' \perp AC' \Rightarrow \quad S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2}AC'.B'D'$.

Ta có : $SB = BC\cot x = a\cot x,\ SC = \dfrac{BC}{\sin x} = \dfrac{a}{\sin x}$,

$$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{\cos 2x}}{\sin x},\ SB' = \frac{SA^2}{SB} = \frac{a\cos 2x}{\sin x \cos x},$$

$$SC' = \frac{SA^2}{SC} = \frac{a\cos 2x}{\sin x},\ B'D' = BD.\frac{SB'}{SB} = \frac{a\sqrt{2}\cos 2x}{\cos^2 x},$$

$$AC' = \frac{SA.AC}{SC} = a\sqrt{2\cos 2x}.$$

Vậy $V = \dfrac{a^3\sqrt{\cos 2x}}{3\sin x},\ V' = \dfrac{a^3\cos^2 2x\sqrt{\cos 2x}}{3\sin x\cos^2 x} \Rightarrow \dfrac{V'}{V} = \dfrac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}$.

Cách 2. Dễ thấy : $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{2V_{S.AB'C'}}{2V_{S.ABC}} = \dfrac{SB'.SC'}{SB.SC}$.

Từ đó dễ dàng suy ra kết quả cần tìm.

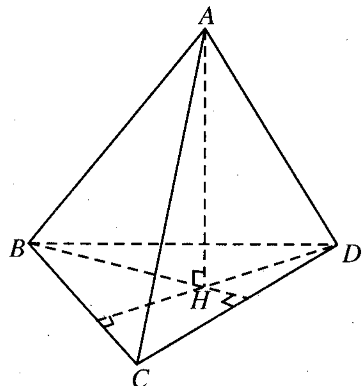
62. 1. (h.44) Do H là trực tâm ΔBCD nên $BH \perp CD$.

Mặt khác $AH \perp (BCD)$ nên $AH \perp CD$.

Vậy $CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB$.

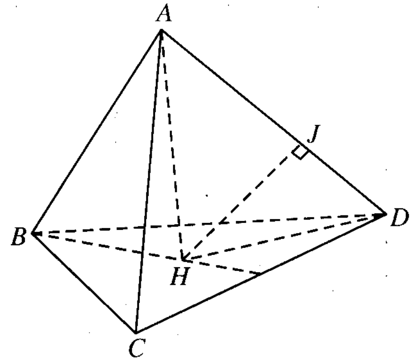
Cùng với giả thiết $AC \perp AB$, ta suy ra $AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp AD$.

Tương tự $AC \perp AD$.



Hình 44

2. (h.45) Từ $AB = AC = AD$ suy ra $HB = HC = HD$, tức H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều BCD.



Hình 45

Xét tam giác vuông AHD, ta có :

$$\frac{1}{HJ^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{HD^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{HD^2} = \frac{1}{d^2} - \frac{1}{h^2}$$

$$\Rightarrow HD = \frac{hd}{\sqrt{h^2 - d^2}}.$$

Do tam giác BCD đều nên $DH = BC.\frac{\sqrt{3}}{3}$, hay $BC = DH\sqrt{3}$. Vậy

$$V = \frac{1}{3}S_{BCD}.AH = \frac{\sqrt{3}d^2h^3}{4(h^2 - d^2)}.$$

Bài tập trắc nghiệm

1. (B),	**2**. (B),	**3**. (C),	**4**. (D),	**5**. (C),	**6**. (B),
7. (B),	**8**. (C),	**9**. (B),	**10**. (C),	**11**. (A),	**12**. (C),
13. (D),	**14**. (B),	**15**. (D),	**16**. (A),	**17**. (B),	**18**. (B),
19. (C),	**20**. (B),	**21**. (A),	**22**. (A),	**23**. (B),	**24**. (A),
25. (D),	**26**. (C),	**27**. (A),	**28**. (A),	**29**. (B),	**30**. (C),
31. (D),	**32**. (A).				

Chương II MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN

A - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ ĐỀ BÀI

§1. Mặt cầu, khối cầu

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ là tập hợp $\{M \mid OM = R\}$. Khối cầu $S(O\ ;\ R)$ là tập hợp $\{M \mid OM \leq R\}$.

Mặt cầu là hình tròn xoay sinh bởi một đường tròn khi quay quanh đường thẳng chứa một đường kính của đường tròn đó.

Khối cầu là hình tròn xoay sinh bởi một hình tròn khi quay quanh đường thẳng chứa một đường kính của hình tròn đó.

2. Giao của mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ và mặt phẳng (P) phụ thuộc vào R và khoảng cách d từ O đến (P). Giả sử H là hình chiếu của O trên mp(P). Khi đó :

– Nếu $d < R$ thì giao là đường tròn nằm trên (P) có tâm H, bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

– Nếu $d = R$ thì mp(P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ tại H.

– Nếu $d > R$ thì mp(P) không cắt mặt cầu $S(O\ ;\ R)$.

3. Giao của mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ và đường thẳng Δ phụ thuộc vào R và khoảng cách d từ O tới Δ. Giả sử H là hình chiếu của O trên Δ. Khi đó :

– Nếu $d < R$ thì đường thẳng Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.

– Nếu $d = R$ thì Δ tiếp xúc với mặt cầu tại H. Các đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu tại H nằm trên tiếp diện với mặt cầu tại H.

– Nếu $d > R$ thì Δ không cắt mặt cầu.

4. Về các tiếp tuyến của mặt cầu cùng đi qua một điểm A nằm ngoài mặt cầu :

– Các đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm bằng nhau.

– Tập hợp các tiếp điểm là một đường tròn.

5. Hình cầu bán kính R có diện tích bằng $4\pi R^2$, có thể tích bằng $\frac{4}{3}\pi R^3$.

II - ĐỀ BÀI

1. Cho tứ diện $ABCD$, biết $AB = BC = AC = BD = a$, $AD = b$, hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau.

a) Chứng minh rằng tam giác ACD vuông.

b) Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

2. Cho hai đường tròn $(O\ ;\ R)$ và $(O'\ ;\ R')$ nằm trên hai mặt phẳng song song (P) và (Q) sao cho OO' vuông góc với (P). Đặt $OO' = h$. Chứng minh rằng có mặt cầu đi qua hai đường tròn trên, tính diện tích mặt cầu đó.

3. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Xét đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với mp(ABC). Gọi S là điểm bất kì trên Δ, S khác A.

1) Khi $SA = h$ (h cho trước), hãy tính diện tích và thể tích của hình cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$.

2) Gọi A' là điểm đối xứng với điểm A qua tâm mặt cầu nói trên. Chứng minh rằng khi S thay đổi trên Δ thì A' thuộc một đường thẳng cố định.

4. Cho hình lăng trụ đứng có chiều cao h không đổi, đáy là tứ giác $ABCD$, trong đó A, B, C, D thay đổi và $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID} = -h^2$, với I là giao điểm hai đường chéo. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đó.

5. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi (P) là mặt phẳng qua cạnh BC và vuông góc với mp(ABC). Gọi $(\mathscr{C})$ là đường tròn đường kính BC trong mp(P) và S là điểm bất kì thuộc $(\mathscr{C})$. Khi S thay đổi trên $(\mathscr{C})$, chứng minh rằng :

1) $SA^2 + SB^2 + SC^2$ không đổi ;

2) Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ là điểm cố định (nếu S khác B, C).

6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a; chiều cao SH bằng $\frac{a}{2}$.

1) Chứng minh rằng tồn tại mặt cầu tâm H tiếp xúc với tất cả các mặt bên của hình chóp. Tính bán kính R của mặt cầu đó.

2) Gọi (P) là mặt phẳng song song với mp$(ABCD)$ và cách mp$(ABCD)$ một khoảng x $(0 < x < R)$. Gọi S_{td} là diện tích thiết diện tạo bởi mp(P) và hình chóp bỏ đi phần nằm trong mặt cầu. Hãy xác định x để $S_{td} = \pi R^2$.

7. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau tại H và SH là đường cao của hình chóp đã cho.

1) Chứng minh rằng bốn tâm mặt cầu ngoại tiếp các hình chóp $S.HAB$, $S.HBC$, $S.HCD$, $S.HDA$ là bốn đỉnh của một hình chữ nhật.

2) Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 là hình chiếu của H lần lượt trên AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng hình chóp $S.H_1H_2H_3H_4$ có mặt cầu ngoại tiếp. Tính diện tích của thiết diện của mặt cầu ấy khi cắt bởi mp$(ABCD)$ nếu biết $H_1H_3 = a$, $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BDC} = \beta$.

8. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp$ mp(ABC), $AB = c$, $AC = b$, $\widehat{BAC} = \alpha$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, B_1, C_1 cùng thuộc một mặt cầu và tính bán kính của mặt cầu đó theo b, c, α.

9. Chứng minh rằng nếu tứ diện $ABCD$ có tính chất

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC$$

thì có mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của tứ diện $ABCD$.

10. Cho hình chóp $S.ABC$. Biết rằng có một mặt cầu bán kính r tiếp xúc với các cạnh của hình chóp và tâm I của mặt cầu nằm trên đường cao SH của hình chóp.

1) Chứng minh rằng $S.ABC$ là hình chóp đều.

2) Tính đường cao của hình chóp biết rằng $IS = r\sqrt{3}$.

11. Cho hai tia Ax, By chéo nhau và vuông góc với nhau, AB là đường vuông góc chung, $AB = a$. Lấy các điểm C và D lần lượt thuộc Ax và By.

1) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ theo a, b, c, ở đó $b = AC$, $c = BD$.

2) Khi C, D thay đổi trên Ax, By sao cho $AC + BD = CD$, chứng tỏ rằng CD luôn tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB.

12. Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 nhận IJ là đường vuông góc chung ($I \in d_1$, $J \in d_2$), $IJ = a$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm I và vuông góc với d_2, đặt α là góc giữa d_1 và (P). Xét một mặt phẳng (Q) song song với (P) cắt d_1, d_2 lần lượt tại A_1, A_2. Gọi H_1 là hình chiếu của A_1 trên (P).

1) Chứng minh rằng các điểm I, J, A_1, A_2, H_1 cùng thuộc một mặt cầu. Chỉ rõ tâm của mặt cầu đó và tính diện tích mặt cầu theo a, α và khoảng cách h giữa hai mặt phẳng (P), (Q).

2) Chứng minh rằng khi mp(Q) thay đổi thì tâm mặt cầu nói trên luôn thuộc một đường thẳng cố định và mặt cầu ấy luôn đi qua một đường tròn cố định.

13. Cho mặt cầu tâm O bán kính R và A là điểm cố định thuộc mặt cầu. Ba tia At_1, At_2, At_3 thay đổi, đôi một vuông góc với nhau và cắt mặt cầu tại các điểm B, C, D.

1) Chứng minh rằng hình hộp dựng trên ba cạnh AB, AC, AD có một đường chéo cố định và mp(BCD) luôn luôn đi qua một điểm cố định.

2) Chứng minh rằng hình chiếu H của điểm D trên đường thẳng BC thuộc một mặt cầu cố định.

14. Cho đường tròn đường kính $AB = 2R$ nằm trong mặt phẳng (P). Gọi O_1 là điểm đối xứng với O qua A. Lấy điểm S sao cho SO_1 vuông góc với (P) và $SO_1 = 2R$. Tính thể tích của khối cầu đi qua đường tròn đã cho và điểm S.

15. Trong số các hình hộp nội tiếp một mặt cầu bán kính R cho trước, tìm hình hộp thoả mãn một trong các tính chất sau :

1) Thể tích hình hộp đạt giá trị lớn nhất ;

2) Tổng độ dài các cạnh của hình hộp đạt giá trị lớn nhất.

16. Trong số các hình chóp tam giác đều nội tiếp một mặt cầu bán kính R cho trước, hãy xác định hình chóp có thể tích lớn nhất. Mở rộng bài toán cho hình chóp n–giác đều.

17. Trong số các hình chóp tam giác đều ngoại tiếp một mặt cầu bán kính r cho trước, tìm hình chóp có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

18. Cho hình chóp $S.ABC$. Biết rằng có một mặt cầu tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC tại trung điểm của mỗi cạnh, đồng thời mặt cầu đó đi qua trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC.

1) Chứng minh rằng $S.ABC$ là hình chóp đều.

2) Tính diện tích mặt cầu, biết cạnh đáy và chiều cao của hình chóp lần lượt là a và h.

19. Cho tam giác ABC vuông ở A, $BC = 2a$, $\widehat{ACB} = 30^o$. Xét hai tia Bx, Cy cùng hướng và cùng vuông góc với mp(ABC).

1) Xác định vị trí điểm B_1 trên Bx sao cho mặt cầu đường kính BB_1 tiếp xúc với Cy.

Xác định điểm C_1 trên Cy sao cho mặt cầu đường kính AC_1 tiếp xúc với Bx.

2) Với các điểm B_1, C_1 tìm được ở trên, hỏi đa diện $ABCC_1B_1$ có mặt cầu ngoại tiếp không ? Hãy tính thể tích của khối đa diện đó.

§2, §3. Khái niệm về mặt tròn xoay. Mặt trụ, hình trụ và khối trụ

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Mặt trụ là hình tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quanh một đường thẳng Δ song song với l.

Mặt trụ có trục Δ, bán kính R là tập hợp các điểm cách đường thẳng Δ một khoảng R.

2. Hình trụ là phần mặt trụ nằm giữa hai mặt phẳng phân biệt (P), (P') vuông góc với trục của mặt trụ, cùng với hai hình tròn giới hạn bởi hai đường tròn ($\mathscr{C}$) và ($\mathscr{C}'$) là giao tuyến của mặt trụ với hai mặt phẳng (P) và (P').

Hình trụ là hình tròn xoay sinh bởi bốn cạnh của một hình chữ nhật khi quay quanh một đường trung bình của hình chữ nhật đó.

Diện tích xung quanh của hình trụ bằng tích số của chu vi đường tròn đáy và chiều cao.

Diện tích toàn phần của hình trụ bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích hai đáy.

3. Khối trụ là hình trụ cùng với phần bên trong hình trụ đó.

Khối trụ là hình tròn xoay sinh bởi một hình chữ nhật (kể cả các điểm nằm trong nó) khi quay quanh một đường trung bình của hình chữ nhật đó.

Thể tích khối trụ bằng tích số của diện tích đáy và chiều cao.

II - ĐỀ BÀI

20. Một hình trụ có diện tích xung quanh là S, diện tích đáy bằng diện tích một mặt cầu bán kính bằng a. Hãy tính :

1) Thể tích hình trụ ;

2) Diện tích thiết diện qua trục của hình trụ.

21. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R, chiều cao OO' bằng h, A và B là hai điểm thay đổi trên hai đường tròn đáy sao cho $AB = a$ không đổi ($h < a < \sqrt{h^2 + 4R^2}$).

1) Chứng minh góc giữa hai đường thẳng AB và OO' không đổi.

2) Chứng minh khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OO' không đổi.

22. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R, thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông.

1) Tính diện tích và thể tích hình cầu ngoại tiếp hình trụ.

2) Một mp(P) song song với trục hình trụ, cắt đáy hình trụ theo một dây cung có độ dài bằng bán kính đáy hình trụ. Tính diện tích các thiết diện của hình trụ và hình cầu ngoại tiếp hình trụ khi cắt bởi mặt phẳng (P).

23. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = a$, $BC = 2a$ và đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$, Δ song song với AD và cách AD một khoảng bằng x, Δ không có điểm chung với hình chữ nhật $ABCD$.

1) Tính thể tích của hình tròn xoay tạo nên khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh Δ.

2) Xác định x để thể tích nói trên gấp ba lần thể tích hình cầu có bán kính bằng cạnh AB.

24. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R, trục OO' bằng h. Một mặt phẳng (P) thay đổi đi qua O, tạo với đáy hình trụ góc α cho trước và cắt hai đáy của hình trụ đã cho theo các dây AB và CD (dây AB đi qua O).

1) Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

2) Chứng minh rằng hình chiếu vuông góc H của điểm O' trên (P) thuộc một đường tròn cố định.

25. Cho hình lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng h.

1) Tính diện tích xung quanh và thể tích hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ.

2) Tính diện tích toàn phần và thể tích hình trụ nội tiếp hình lăng trụ.

26. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với đáy nhỏ $AB = a$, đáy lớn $CD = 4a$, cạnh bên bằng $\frac{5a}{2}$; chiều cao hình lăng trụ bằng h.

1) Chứng minh rằng có hình trụ nội tiếp hình lăng trụ đã cho.

2) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ đó.

27. Cho hình trụ có trục O_1O_2. Một mặt phẳng (α) song song với trục O_1O_2, cắt hình trụ theo thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$. Gọi O là tâm của thiết diện đó. Tính $\widehat{O_1OO_2}$ biết rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ bằng bán kính đường tròn đáy hình trụ.

28. Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng 4π.

1) Tính diện tích toàn phần của hình trụ.

2) Tính thể tích khối trụ.

3) Tính thể tích khối lăng trụ n–giác đều nội tiếp hình trụ.

4) Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình trụ.

5) Một mặt phẳng (α) song song với trục hình trụ và cắt hình trụ đó theo thiết diện ABB_1A_1. Biết một cạnh của thiết diện là dây cung của một đường tròn đáy và căng một cung 120°. Tính diện tích thiết diện.

29. Xét hình trụ nội tiếp một mặt cầu bán kính R mà diện tích thiết diện qua trục hình trụ là lớn nhất. Tính :

1) Thể tích V và diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ.

2) Thể tích hình lăng trụ n–giác đều nội tiếp hình trụ và thể tích hình lăng trụ n–giác đều ngoại tiếp hình trụ.

3) Diện tích thiết diện của hình trụ khi cắt bởi một mặt phẳng song song với trục hình trụ và cách trục một khoảng $\frac{R}{2}$.

Hãy tính x theo R và R' nếu (Q) chia phần hình nón nằm giữa (P) và đáy hình nón thành hai phần có thể tích bằng nhau.

32. Cho hình nón $\mathcal{N}$ có bán kính đáy là R, góc giữa đường sinh và đáy của hình nón bằng α. Một mặt phẳng (P) song song với đáy hình nón, cách đáy hình nón một khoảng h và cắt hình nón theo đường tròn $(\mathcal{C})$.

1) Tính bán kính đường tròn $(\mathcal{C})$ theo R, h, α.

2) Tính diện tích và thể tích phần hình nón nằm giữa đáy hình nón $\mathcal{N}$ và mặt phẳng (P).

33. Cho tam giác đều ABC cạnh a và (P) là mặt phẳng qua BC và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi $(\mathcal{C})$ là đường tròn đường kính BC và nằm trong mp(P).

1) Tính bán kính mặt cầu đi qua đường tròn $(\mathcal{C})$ và điểm A.

2) Xét hình nón ngoại tiếp mặt cầu nói trên sao cho các tiếp điểm giữa hình nón và mặt cầu là đường tròn $(\mathcal{C})$. Tính thể tích của khối nón.

34. Cho hình nón $\mathcal{N}$ có bán kính đáy R, đường cao SO. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với SO tại O_1 sao cho $SO_1 = \frac{1}{3}SO$. Một mặt phẳng qua trục hình nón cắt phần khối nón $\mathcal{N}$ nằm giữa (P) và đáy hình nón theo thiết diện là hình tứ giác có hai đường chéo vuông góc.

Tính thể tích phần hình nón $\mathcal{N}$ nằm giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng chứa đáy hình nón $\mathcal{N}$.

35. 1) Tìm hình nón có thể tích lớn nhất nội tiếp một mặt cầu bán kính R cho trước.

2) Tìm hình nón có thể tích nhỏ nhất ngoại tiếp mặt cầu bán kính r cho trước.

36. Tìm hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của nó bằng diện tích hình tròn bán kính a cho trước.

37. Cho hai điểm cố định A, B có $AB = a$. Với mỗi điểm C trong không gian sao cho ABC là tam giác đều, kí hiệu AA_1 là đường cao của ΔABC và d là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Trong mặt phẳng chứa d và

44. Trong tất cả các hình nón nội tiếp hình cầu bán kính R, tìm hình nón có diện tích xung quanh lớn nhất.

Với hình nón ấy, xét hình trụ nội tiếp hình nón. Tìm chiều cao của hình trụ đó, biết rằng thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông.



Ôn tập chương II

Bài tập tự luận

45. Cho tứ diện đều $ABCD$, AA_1 là một đường cao của tứ diện. Gọi I là trung điểm của AA_1. Mặt phẳng (BCI) chia tứ diện đã cho thành hai tứ diện. Tính tỉ số hai bán kính của hai mặt cầu ngoại tiếp hai tứ diện đó.

46. Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy và chiều cao thay đổi. Tìm hệ thức liên hệ giữa cạnh đáy và chiều cao của hình chóp để $\frac{V_1}{V_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất, ở đó V_1, V_2 lần lượt là thể tích của các hình cầu ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp.

47. Cho tam giác AIB có $IA = IB = 2a$, $\widehat{AIB} = 120^\circ$. Trên đường thẳng Δ vuông góc với mp(AIB) tại I, lấy các điểm C và D sao cho ABC là tam giác vuông, ABD là tam giác đều.

1) Tính thể tích và diện tích toàn phần của tứ diện $ABCD$.

2) Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

3) Tính bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$.

48. Gọi r và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của một hình nón. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích hình nón và thể tích hình cầu nội tiếp hình nón.

1) Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ theo r, h.

2) Khi r và h thay đổi, tìm giá trị bé nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

49. Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy R, góc ở đỉnh là 2α, $45^\circ < \alpha < 90^\circ$.

1) Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón.

2) Tính diện tích thiết diện do mp(P) cắt hình nón theo hai đường sinh vuông góc với nhau.

3) Xét hai điểm A, B thay đổi trên đáy sao cho góc giữa mp(SAB) và mặt đáy hình nón bằng β ($\beta < 90^o$). Chứng minh rằng đường thẳng SI (I là trung điểm của AB) luôn thuộc một hình nón cố định.

50. Một hình nón có bán kính đáy r, chiều cao bằng $3r$. Tìm hình trụ nội tiếp hình nón và thoả mãn một trong các điều kiện sau :

1) Thể tích của hình trụ đạt giá trị lớn nhất ;

2) Diện tích xung quanh của hình trụ đạt giá trị lớn nhất.

Bài tập trắc nghiệm

1. Hình chóp $D.ABC$ có $DA \perp \text{mp}(ABC)$, đáy ABC là tam giác vuông tại B. Đặt $AB = c, BC = a, AD = b$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng

(A) $\frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; (B) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$;

(C) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; (D) $2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

2. Cho điểm A và đường thẳng d không đi qua A. Xét các mặt cầu có tâm thuộc d và đi qua điểm A. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

(A) Các mặt cầu đó luôn đi qua một điểm cố định ;

(B) Các mặt cầu đó luôn đi qua hai điểm cố định ;

(C) Các mặt cầu đó luôn đi qua một đường tròn cố định ;

(D) Cả ba mệnh đề trên đều sai.

3. Cho bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt cầu và $\widehat{ADB} = \widehat{BDC} = \widehat{CDA} = 90^o$. Một đường kính của mặt cầu đó là

(A) AB ;

(B) BC ;

(C) AC ;

(D) DD', trong đó $\overrightarrow{DD'} = 3\overrightarrow{DG}$ với G là trọng tâm tam giác ABC.

4. Cho mặt cầu (S_1) bán kính R_1, mặt cầu (S_2) bán kính R_2 mà $R_2 = 2R_1$. Tỉ số diện tích của mặt cầu (S_2) và mặt cầu (S_1) bằng

(A) $\frac{1}{2}$; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) 4.

5. Cho mặt phẳng (P) và điểm S nằm ngoài (P). Gọi A là điểm cố định thuộc (P) sao cho SA không vuông góc với (P). Một đường thẳng d thay đổi, nằm trong (P) và luôn đi qua A. Tập hợp các hình chiếu của điểm S trên đường thẳng d là

(A) Một mặt cầu ;

(B) Một mặt trụ ;

(C) Một mặt nón ;

(D) Một đường tròn.

6. Cho điểm A cố định thuộc mặt cầu (S). Ba đường thẳng thay đổi đi qua A, đôi một vuông góc và cắt mặt cầu (S) tại B, C, D. Xét hình hộp chữ nhật dựng trên ba cạnh AB, AC, AD. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Hình hộp đó có một đường chéo cố định ;

(B) Hình hộp đó có hai đường chéo cố định ;

(C) Hình hộp đó có ba đường chéo cố định ;

(D) Hình hộp đó không có đường chéo nào cố định.

7. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi (P) là mặt phẳng qua BC và vuông góc với mp(ABC). Trong mp(P), xét đường tròn $(\mathscr{C})$ đường kính BC. Bán kính của mặt cầu (S) đi qua $(\mathscr{C})$ và điểm A bằng

(A) $a\sqrt{3}$; (B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; (C) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; (D) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

8. Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm của các mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp, tiếp xúc với các cạnh của một hình lập phương. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) O_1 trùng với O_2 ; (B) O_2 trùng với O_3 ;

(C) O_3 trùng với O_1 ; (D) O_1, O_2, O_3 trùng nhau.

9. Kí hiệu R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính của các mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp, tiếp xúc với các cạnh của một hình lập phương. Khi ấy :

(A) $R_1 > R_2 > R_3$; (B) $R_2 > R_3 > R_1$;

(C) $R_1 > R_3 > R_2$; (D) $R_3 > R_1 > R_2$.

10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh cùng bằng a. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó là

(A) $a\sqrt{2}$; (B) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; (C) $a\sqrt{3}$; (D) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

11. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh cùng bằng a. Bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp là

(A) $\frac{a\sqrt{2}}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}$; (B) $\frac{a\sqrt{2}}{4\left(1+\sqrt{3}\right)}$; (C) $\frac{a\sqrt{3}}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}$; (D) $\frac{a\sqrt{3}}{4\left(1+\sqrt{3}\right)}$.

12. Cho hình lăng trụ tam giác đều có các cạnh cùng bằng a. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ là

(A) $7\pi a^2$; (B) $\frac{7\pi a^2}{2}$; (C) $\frac{7\pi a^2}{3}$; (D) $\frac{7\pi a^2}{6}$.

13. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi (P) là mặt phẳng qua BC và vuông góc với mp(ABC). Trong (P), xét đường tròn $(\mathscr{C})$ đường kính BC. Diện tích mặt cầu nội tiếp hình nón có đáy là $(\mathscr{C})$, đỉnh là A bằng

(A) $\frac{\pi a^2}{2}$; (B) $\frac{\pi a^2}{3}$; (C) πa^2 ; (D) $2\pi a^2$.

14. Cho hai điểm A, B cố định. M là điểm di động trong không gian sao cho $\widehat{MAB} = 30^\circ$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) M thuộc mặt cầu cố định ;

(B) M thuộc mặt trụ cố định ;

(C) M thuộc mặt phẳng cố định ;

(D) M thuộc mặt nón cố định.

15. Cho hai đường thẳng song song a và b. Gọi (P) và (Q) là các mặt phẳng thay đổi lần lượt đi qua a, b và vuông góc với nhau. Gọi c là giao tuyến của (P) và (Q). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) c thuộc mặt phẳng cố định ;

(B) c thuộc mặt trụ cố định ;

(C) c thuộc mặt nón cố định ;

(D) Cả ba mệnh đề trên đều sai.

16. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4, diện tích đáy bằng diện tích một mặt cầu bán kính bằng 1. Thể tích khối trụ đó là

(A) 4 ; (B) 6 ; (C) 8 ; (D) 10.

17. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 1, thiết diện qua trục là hình vuông. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình trụ là

(A) $6\pi\sqrt{3}$; (B) $3\pi\sqrt{3}$; (C) $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}$; (D) $\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$.

18. Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng 4π. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình trụ là

(A) 12π ; (B) 10π ; (C) 8π ; (D) 6π.

19. Thể tích một khối trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng 4π là

(A) π ; (B) 2π ; (C) 3π ; (D) 4π .

20. Diện tích toàn phần của một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4π, thiết diện qua trục là hình vuông bằng

(A) 12π; (B) 10π ; (C) 8π ; (D) 6π.

21. Một hình trụ có diện tích xung quanh là 4π, thiết diện qua trục là hình vuông. Một mặt phẳng (α) song song với trục, cắt hình trụ theo thiết diện $ABB'A'$, biết một cạnh của thiết diện là một dây của đường tròn đáy hình trụ và căng một cung 120°. Diện tích thiết diện $ABB'A'$ là

(A) $\sqrt{3}$; (B) $2\sqrt{3}$; (C) $2\sqrt{2}$; (D) $3\sqrt{2}$.

22. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a. Diện tích xung quanh của hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và có chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$ là

(A) $\frac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$; (B) $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$; (C) $\pi a^2\sqrt{3}$; (D) $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

23. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Diện tích xung quanh của hình trụ có đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD, chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$ là

(A) $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$; (B) $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$; (C) $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$; (D) $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

24. Một hình trụ có bán kính đáy bằng R và thiết diện qua trục là hình vuông. Thể tích của khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ là

(A) $2R^3$; (B) $3R^3$; (C) $4R^3$; (D) $5R^3$.

25. Thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác đều cạnh bằng 2. Một mặt cầu có diện tích bằng diện tích toàn phần của hình nón sẽ có bán kính là

(A) $2\sqrt{3}$; (B) 2 ; (C) $\sqrt{3}$; (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

26. Một hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên hình hộp bằng $2a$. Thể tích khối nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp một đáy hình hộp và đỉnh là tâm của đáy còn lại của hình hộp bằng

(A) $\frac{\pi a^3}{3}$; (B) $\frac{\pi a^3}{2}$; (C) πa^3 ; (D) $2\pi a^3$.

27. Một hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên của hình hộp bằng $2a$. Diện tích xung quanh của hình nón có đáy là đường tròn nội tiếp một đáy hình hộp và đỉnh là tâm của đáy còn lại của hình hộp là

(A) $\frac{\pi a^2\sqrt{17}}{2}$; (B) $\frac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}$; (C) $\frac{3\pi a^2}{2}$; (D) $3\pi a^2$.

28. Một hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều. Tỉ số thể tích của khối cầu ngoại tiếp và khối cầu nội tiếp khối nón là

(A) 8 ; (B) 6 ; (C) 4 ; (D) 2.

29. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA \perp mp(ABC), DB \perp BC, AD = AB = BC = a$. Kí hiệu V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của hình tròn xoay sinh bởi tam giác ABD khi quay quanh AD, tam giác ABC khi quay quanh AB, tam giác DBC khi quay quanh BC. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) $V_1 + V_2 = V_3$; (B) $V_1 + V_3 = V_2$;

(C) $V_2 + V_3 = V_1$; (D) $V_1 = V_2 = V_3$.

30. Một hình nón có bán kính đáy bằng R, đường cao $\frac{4R}{3}$. Khi đó, góc ở đỉnh của hình nón là 2α mà

(A) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$;   (B) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$;

(C) $\tan\alpha = \frac{3}{5}$;   (D) $\cot\alpha = \frac{3}{5}$.

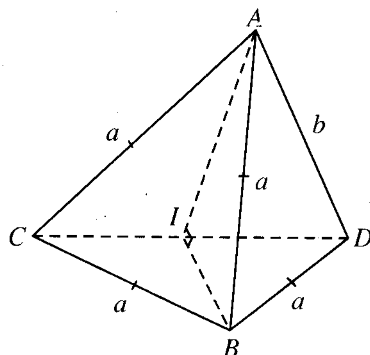
B - LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

§1. Mặt cầu, khối cầu

1. (h.46, h.47)

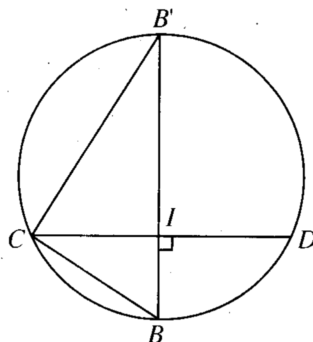
a) Gọi I là trung điểm của CD, do $BC = BD = a$ nên $BI \perp CD$. Mặt khác mp(BCD) $\perp$ mp(ACD) nên $BI \perp$ mp(ACD).

Xét các tam giác vuông AIB và DIB có cạnh góc vuông BI chung, $BA = BD$, từ đó $AI = ID$. Vậy ACD là tam giác vuông tại A.



Hình 46

b) Từ chứng minh trên, ta thấy tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ thuộc BI, do đó, bán kính mặt cầu phải tìm chính là bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.



Hình 47

Dễ thấy $CB^2 = BI.BB' = 2R.BI$, tức là $R = \frac{a^2}{2BI}$.

Mặt khác

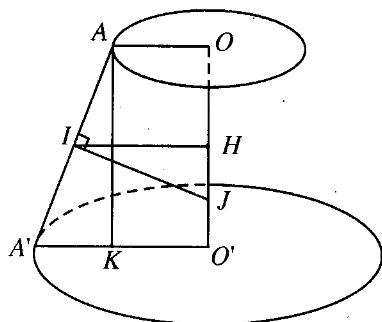
$$BI^2 = BC^2 - \frac{CD^2}{4} = a^2 - \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{3a^2 - b^2}{4}$$

$$\Rightarrow BI = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 - b^2}, \; 0 < b < a\sqrt{3}.$$

Như vậy $R = \dfrac{a^2}{\sqrt{3a^2 - b^2}}$, do đó diện tích mặt cầu phải tìm bằng $\dfrac{4\pi a^4}{3a^2 - b^2}$ với $0 < b < a\sqrt{3}$.

2. (h.48) Giả sử $R \leq R'$. Vì $OO' \perp (P)$ nên mọi điểm thuộc OO' cách đều các điểm của đường tròn $(O ; R)$, đồng thời cách đều các điểm của đường tròn $(O' ; R')$.

Xét mp(R) qua OO' và cắt hai mặt phẳng (P), (Q) theo hai giao tuyến OA, $O'A'$, $A \in (O ; R)$, $A' \in (O' ; R')$. Trong mp(R), đường trung trực của AA' cắt OO' tại J. Khi đó, mặt cầu tâm J, bán kính JA đi qua cả hai đường tròn $(O ; R)$ và $(O' ; R')$. Gọi S là diện tích mặt cầu đó thì



Hình 48

$$S = 4\pi.JA^2 = 4\pi(OA^2 + JO^2) = 4\pi(R^2 + JO^2).$$

Kẻ IH song song với AO $(H \in OO')$ thì $OH = \dfrac{h}{2}$. Từ $OH + JH = JO$, suy ra $\dfrac{h}{2} + JH = JO$. Kẻ AK song song với OO' $(K \in O'A')$ thì có $\dfrac{HJ}{A'K} = \dfrac{IH}{AK}$, từ đó

$$HJ = \frac{\dfrac{R'+R}{2}.(R'-R)}{h} = \frac{R'^2 - R^2}{2h}.$$

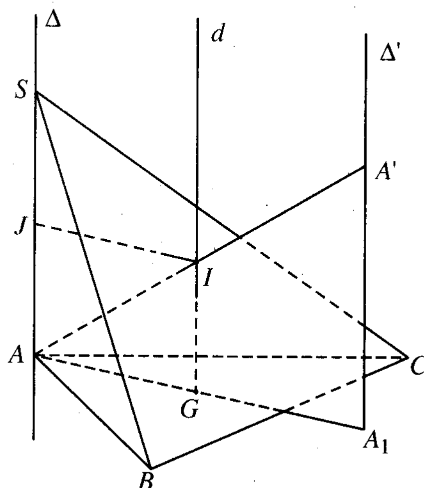
Vậy $JO = \dfrac{h}{2} + \dfrac{R'^2 - R^2}{2h} = \dfrac{h^2 + R'^2 - R^2}{2h}$ và diện tích mặt cầu phải tìm là

$$S = 4\pi\left[R^2 + \frac{\left(h^2 + R'^2 - R^2\right)^2}{4h^2}\right]$$

$$= \pi.\frac{4R^2h^2 + \left(h^2 + R'^2 - R^2\right)^2}{h^2}.$$

3. (h.49)

1) Gọi G là trọng tâm của tam giác đều ABC và d là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABC thì $G \in d$ và $d // \Delta$. Trong mp(Δ, d), đường trung trực của SA cắt d tại điểm I thì I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ và $R = IA$ là bán kính của mặt cầu đó.



Hình 49

Dễ thấy $GI = \frac{1}{2}SA = \frac{h}{2}$, $AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, từ đó $IA^2 = \frac{h^2}{4} + \frac{a^2}{3} = \frac{1}{12}(4a^2 + 3h^2)$.

Vậy mặt cầu đó có diện tích là

$$S = \frac{\pi}{3}\left(4a^2 + 3h^2\right)$$

và thể tích là

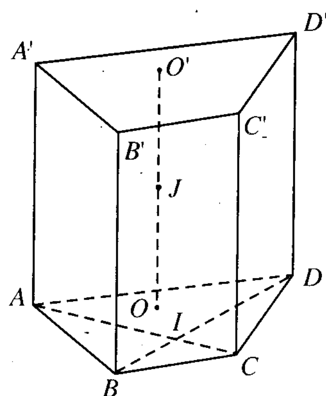
$$V = \frac{4}{3}\pi.\left(\frac{\sqrt{4a^2 + 3h^2}}{2\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{\pi}{18\sqrt{3}}\left(\sqrt{4a^2 + 3h^2}\right)^3.$$

2) Khi S thay đổi trên đường thẳng Δ thì tâm I của mặt cầu ấy thay đổi trên đường thẳng d. Mặt khác $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AI}$, vậy A' thuộc đường thẳng Δ' song song với Δ và qua điểm A_1 sao cho $\overrightarrow{AA_1} = 2\overrightarrow{AG}$, tức là A' thuộc đường thẳng cố định Δ'.

4. (h.50) Vì $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID}$ nên $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn. Mặt khác, hình lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng nên hình lăng trụ đó có mặt cầu ngoại tiếp.

Kí hiệu O, O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$ của hình lăng trụ và gọi J là trung điểm của OO' thì J là tâm mặt cầu phải tìm và bán kính của mặt cầu là JA.

Mặt khác $JA^2 = JO^2 + AO^2 = \frac{h^2}{4} + AO^2$.



Hình 50

Từ đó, bán kính mặt cầu đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy $ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $h^2 = -\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID} = AO^2 - IO^2 \Rightarrow AO^2 = h^2 + IO^2$.

Từ đó, AO^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi IO nhỏ nhất, điều này xảy ra khi và chỉ khi $O \equiv I$, lúc đó $AO^2 = h^2$ và giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ bằng $JA = \frac{h\sqrt{5}}{2}$.

5. (h.51)

1) Vì $\widehat{BSC} = 90^o$ nên $SB^2 + SC^2 = BC^2 = a^2$.

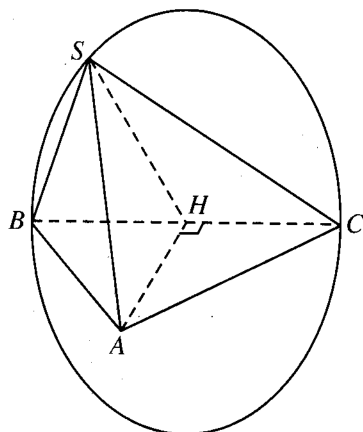
Gọi H là trung điểm của BC thì

$SH = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$ và $AH \perp BC$.

Mặt khác, $(P) \perp mp(ABC)$ và cắt mặt phẳng này theo giao tuyến BC nên $AH \perp (P)$.

Từ đó $SA^2 = SH^2 + AH^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = a^2$.

Vậy $SA^2 + SB^2 + SC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$.



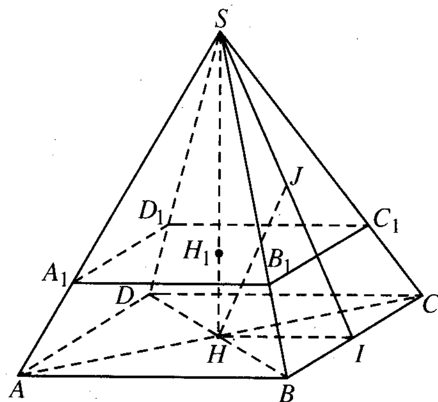
Hình 51

2) Vì $HB = HC = HS$, $AH \perp mp(SBC)$ nên đường thẳng AH là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔSBC. Do đó, tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ thuộc AH. Mặt khác, ABC là tam giác đều nên tâm mặt cầu đó chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và bán kính mặt cầu bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Điều ấy khẳng định rằng mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ là cố định.

6. (h.52)

1) Gọi I là trung điểm của BC thì $HI = \frac{a}{2} = SH$. Gọi J là trung điểm của SI thì $HJ \perp SI$, mặt khác $HJ \perp BC$, vậy $HJ \perp mp(SBC)$ đồng thời $HJ = \frac{SI}{2} = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Tương tự, ta có khoảng cách từ H tới các mặt bên của hình chóp đã cho cũng bằng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. Như vậy, mặt cầu tâm H, bán kính $R = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ là mặt cầu tiếp xúc với các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$.



Hình 52

2) Gọi H_1 là giao điểm của (P) và SH thì $HH_1 = x$, $0 < HH_1 < R$ và thiết diện của hình chóp với (P) là hình vuông $A_1B_1C_1D_1$. Khi ấy

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{\frac{a}{2} - x}{\frac{a}{2}}\right)^2 = \frac{(a-2x)^2}{a^2}.$$

Từ đó $S_{A_1B_1C_1D_1} = (a - 2x)^2$.

Ta có (P) cắt mặt cầu nêu trên theo đường tròn bán kính r được tính bởi $r^2 = R^2 - x^2$ hay $r^2 = \frac{a^2}{8} - x^2 = \frac{a^2 - 8x^2}{8}$, từ đó diện tích hình tròn thu được là $\frac{1}{8}\pi(a^2 - 8x^2)$. Vậy

$$S_{td} = (a-2x)^2 - \frac{1}{8}\pi(a^2 - 8x^2) = \frac{1}{8}\left[8(a-2x)^2 - \pi\left(a^2 - 8x^2\right)\right].$$

Ta có $S_{td} = \pi R^2 = \frac{1}{8}\pi a^2 \Leftrightarrow 8(a-2x)^2 - \pi a^2 + 8\pi x^2 = \pi a^2$

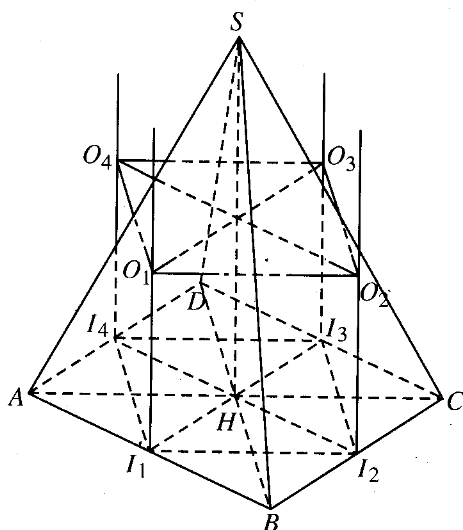
$$\Leftrightarrow 4\left[(a-2x)^2 + \pi x^2\right] = \pi a^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4a - \pi a}{8 + 2\pi} \left(\text{vì } 0 < x < R = \frac{a\sqrt{2}}{4}\right).$$

7. (h.53a,b)

1) Gọi I_1 là trung điểm của AB và O_1 là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABH$ thì $I_1O_1 \,//\, SH$ và $I_1O_1 = \frac{1}{2}SH$.

Tương tự như trên, nếu I_2, I_3, I_4 thứ tự là trung điểm của BC, CD, DA và O_2, O_3, O_4 thứ tự là tâm của mặt cầu ngoại tiếp các hình chóp $S.HBC$, $S.HCD$, $S.HDA$ thì $I_2O_2 = \frac{1}{2}SH$, $I_3O_3 = \frac{1}{2}SH$, $I_4O_4 = \frac{1}{2}SH$ và I_2O_2, I_3O_3, I_4O_4 cùng song song với SH.



Hình 53a

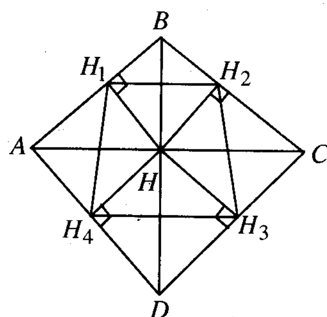
Dễ thấy $I_1I_2 // O_1O_2$ và $I_1I_2 // AC$,

$I_2I_3 // O_2O_3$ và $I_2I_3 // BD$,

$I_3I_4 // O_3O_4$ và $I_3I_4 // AC$,

$I_4I_1 // O_4O_1$ và $I_4I_1 // BD$.

Kết hợp với $AC \perp BD$, ta có $O_1O_2O_3O_4$ là hình chữ nhật.



Hình 53b

2) Dễ thấy $\widehat{HH_1H_2} = \widehat{HBH_2} = \widehat{HBC}$,

$\widehat{HH_1H_4} = \widehat{HAH_4} = \widehat{HAD}$,

$\widehat{HH_3H_2} = \widehat{HCH_2} = \widehat{HCB}$,

$\widehat{HH_3H_4} = \widehat{HDH_4} = \widehat{HDA}$.

Từ đó

$$\widehat{HH_1H_2} + \widehat{HH_1H_4} + \widehat{HH_3H_2} + \widehat{HH_3H_4} = \widehat{HBC} + \widehat{HCB} + \widehat{HAD} + \widehat{HDA} = 180^\circ.$$

Vậy $H_1H_2H_3H_4$ là tứ giác nội tiếp đường tròn. Từ đó hình chóp $S.H_1H_2H_3H_4$ có mặt cầu ngoại tiếp.

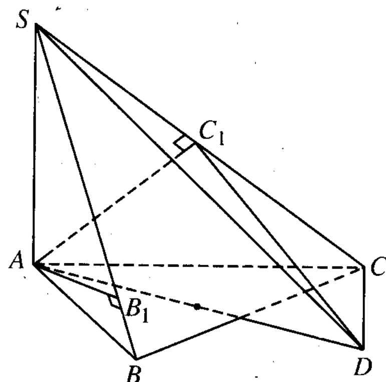
Diện tích thiết diện của hình cầu đó và mặt phẳng $(ABCD)$ là diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác $H_1H_2H_3H_4$.

Vì $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BDC} = \beta$ nên $\widehat{H_1H_4H_3} = \alpha + \beta$. Khi ấy $\dfrac{H_1H_3}{\sin(\alpha + \beta)} = 2R$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $H_1H_2H_3H_4$), từ đó $R = \dfrac{a}{2\sin(\alpha + \beta)}$.

Vậy diện tích hình thu được là

$$4\pi R^2 = \frac{\pi a^2}{\sin^2(\alpha + \beta)}.$$

8. (h.54) Gọi AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, khi đó $CD \perp AC$, mặt khác $CD \perp SA$, từ đó $CD \perp \text{mp}(SAC)$, vậy $CD \perp AC_1$. Theo giả thiết, $AC_1 \perp SC$ nên $AC_1 \perp C_1D$.



Hình 54

Tương tự như trên, ta cũng có $\widehat{ABD} = 90^{\circ}$, $\widehat{AB_1D} = 90^{\circ}$. Vậy AD là đường kính của mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, B_1, C_1.

Bán kính R của mặt cầu đó cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, do đó $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R$, mặt khác

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A \text{ hay } BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha},$$

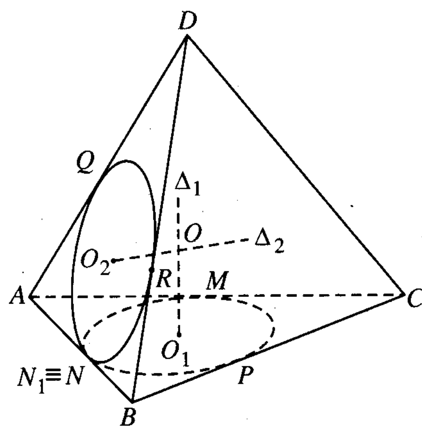
vậy $\quad R = \dfrac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$.

Chú ý. Có thể chứng minh các điểm A, B, C, B_1, C_1 cùng thuộc một mặt cầu như sau :

Xét các tam giác vuông SAB, SAC, ta có $SA^2 = SB.SB_1$, $SA^2 = SC.SC_1$, từ đó $SB.SB_1 = SC.SC_1$, suy ra B, C, B_1, C_1 cùng thuộc một đường tròn. Như vậy, hình chóp $A.BCC_1B_1$ với đáy BCC_1B_1 có đường tròn ngoại tiếp nên hình chóp đó có mặt cầu ngoại tiếp, tức là các điểm A, B, C, C_1, B_1 cùng thuộc một mặt cầu.

9. (h.55) Gọi O_1 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và các điểm tiếp xúc của đường tròn đó với các cạnh là M, N, P. Gọi Δ_1 là trục của đường tròn này thì Δ_1 chứa tâm của các mặt cầu tiếp xúc với ba cạnh AB, BC, CA.

Tương tự, nếu gọi Δ_2 là trục của đường tròn nội tiếp tam giác ABD thì Δ_2 chứa tâm của các mặt cầu tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABD. Kí hiệu điểm tiếp xúc của ba cạnh ấy với đường tròn nội tiếp ΔABD là N_1, Q, R (N_1 thuộc AB).



Hình 55

Khi ấy, vì

$$AN = \frac{AB + AC - BC}{2},\ AN_1 = \frac{AB + AD - BD}{2}$$

mà $AC + BD = AD + BC$ nên $AN = AN_1$, từ đó $N \equiv N_1$.

Suy ra $AB \perp$ mp(O_1NO_2). Mặt khác, $\Delta_1 \perp AB$ và cắt mp(ABC) tại O_1, Δ_2 vuông góc với AB và cắt mp(ABD) tại O_2 nên Δ_1, Δ_2 cùng nằm trong mp(O_1NO_2). Từ đó Δ_1 cắt Δ_2 tại điểm O, đó là điểm cách đều năm cạnh AB, AC, BC, AD, BD của tứ diện $ABCD$ hay

$$OM = ON = OP = OQ = OR. \qquad (1)$$

Hoàn toàn tương tự như trên, ta cũng có Δ_2 cắt Δ_3 (Δ_3 là trục của đường tròn nội tiếp tam giác ACD) tại O' và

$$O'M = O'N = O'Q = O'R = O'S \qquad (2)$$

(S là điểm tiếp xúc của cạnh CD với đường tròn nội tiếp ΔACD).

Từ (1), (2) ta có O, O' cùng là tâm của mặt cầu đi qua bốn điểm M, N, Q, R mà M, N, Q, R không đồng phẳng, vậy $O \equiv O'$. Đó là tâm mặt cầu tiếp xúc với sáu cạnh của tứ diện, bán kính mặt cầu đó là ON.

10. (h.56a,b)

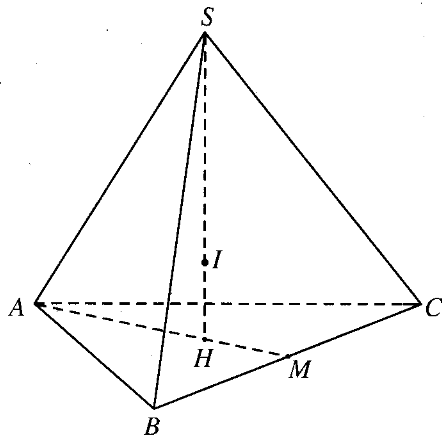
1) Vì các cạnh của hình chóp tiếp xúc với mặt cầu nên

$$SA + BC = SB + AC = SC + AB.$$

Mặt khác, tâm I của mặt cầu thuộc đường cao SH nên dễ thấy $\widehat{ISA} = \widehat{ISB} = \widehat{ISC}$, tức là $\widehat{HSB} = \widehat{HSA} = \widehat{HSC}$, từ đó

$$SA = SB = SC.$$

Vậy $AB = BC = CA$, từ đó $S.ABC$ là hình chóp đều.

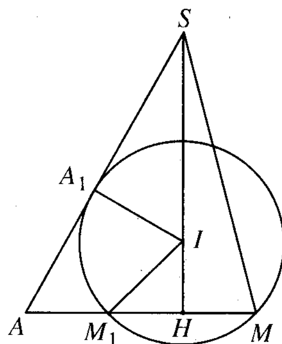


Hình 56a

2) Đặt $SH = h$. Gọi M là trung điểm của BC thì mp(SAM) cắt mặt cầu theo đường tròn lớn, đường tròn này tiếp xúc với SA tại A_1, đi qua điểm M và cắt AM tại M_1, dễ thấy $AM_1 = M_1H = HM$.

Vì $\Delta SA_1I \backsim \Delta SHA$ nên $\dfrac{A_1I}{SI} = \dfrac{AH}{SA}$,

từ đó $\dfrac{r}{r\sqrt{3}} = \dfrac{AH}{\sqrt{h^2 + AH^2}}$.



Hình 56b

Từ $AH = 2M_1H$ suy ra

$$AH^2 = 4M_1H^2 = 4(IM_1^2 - IH^2)$$

$$= 4\left[r^2 - \left(h - r\sqrt{3}\right)^2\right].$$

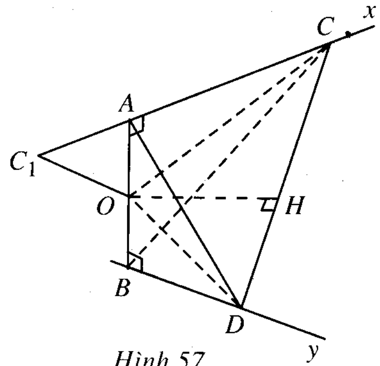
Vậy $$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{r^2 - \left(h - r\sqrt{3}\right)^2}}{\sqrt{h^2 + 4\left[r^2 - \left(h - r\sqrt{3}\right)^2\right]}}$$

$$\Leftrightarrow 9h^2 - 16rh\sqrt{3} + 16r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{4r}{\sqrt{3}} \text{ (do } h > IS > r).$$

11. (h.57)

1) Vì $AC \perp AB$, $AC \perp BD$ nên $AC \perp AD$. Tương tự như trên, ta có $CB \perp BD$. Vậy CD là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.



Hình 57

Dễ thấy $CD^2 = CA^2 + AB^2 + BD^2$

$$= a^2 + b^2 + c^2,$$

tức là

$$CD = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Vậy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là trung điểm của CD và bán kính mặt cầu bằng $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

2) Gọi C_1 là điểm thuộc tia đối của tia Ax sao cho $AC_1 = BD$. Gọi O là trung điểm của AB thì

$$OC_1^2 = AC_1^2 + \frac{AB^2}{4},$$

$$OD^2 = BD^2 + \frac{AB^2}{4},$$

do đó $OC_1 = OD$.

Mặt khác $CD = AC + BD$, từ đó $CD = CC_1$.

Vậy hai tam giác OC_1C và ODC bằng nhau, suy ra $OA = OH$ (trong đó OA, OH lần lượt là đường cao của hai tam giác đó). Điều này khẳng định khoảng cách từ O đến CD bằng $\frac{AB}{2}$, tức là mặt cầu đường kính AB tiếp xúc với CD.

12. (h.58)

1) Vì (P) đi qua I và $(P) \perp d_2$, $IJ \perp d_2$ nên $IJ \subset (P)$.

Vì H_1 là hình chiếu của A_1 trên (P) nên $\widehat{A_1IH_1} = \alpha$ và $A_1H_1 \ // \ d_2$. Do mp(Q) song song với mp(P) và (Q) cắt d_1, d_2 tại A_1, A_2 nên $A_1A_2 \ // \ JH_1$. Suy ra $JH_1A_1A_2$ là hình chữ nhật.

Mặt khác $\widehat{JIA_1} = 90^\circ$, vậy các điểm I, J, A_1, A_2, H_1 cùng thuộc một mặt cầu, tâm mặt cầu là trung điểm O của JA_1, bán kính của mặt cầu là $R = \frac{1}{2}JA_1$.

Hình 58

Ta có $JA_1^2 = IJ^2 + IA_1^2 = a^2 + \dfrac{h^2}{\sin^2 \alpha}$,

từ đó $R = \dfrac{1}{2\sin \alpha}\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + h^2}$.

Diện tích mặt cầu là $S = \dfrac{\pi}{\sin^2 \alpha}\left(a^2 \sin^2 \alpha + h^2\right)$.

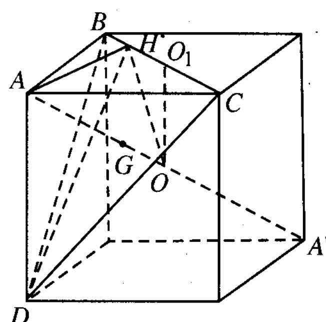
2) Khi mặt phẳng (Q) thay đổi thì A_1 luôn thuộc d_1 mà $\overrightarrow{JO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JA_1}$, vậy O thuộc đường thẳng d_3 đi qua trung điểm K của IJ và d_3 song song với d_1. Xét mặt phẳng (R) chứa IJ và vuông góc với d_3 thì (R) cắt mặt cầu nêu trên theo đường tròn tâm K, mà K là trung điểm của IJ nên IJ là đường kính

[redacted]

của đường tròn. Đường tròn này cố định, từ đó ta có mặt cầu đi qua các điểm I, J, A_1, A_2, H_1 luôn qua một đường tròn cố định.

13. (h.59)

1) Dễ thấy các đỉnh của hình hộp chữ nhật dựng trên ba cạnh AB, AC, AD cũng thuộc mặt cầu đã cho. Khi ấy tâm O của mặt cầu là trung điểm của đường chéo AA' của hình hộp, tức là hình hộp nêu trên có một đường chéo cố định là AA'.



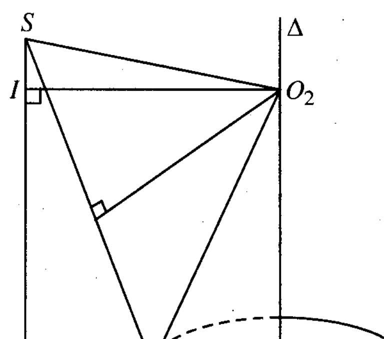
Hình 59

Mặt khác AA' cắt mp(BCD) tại trọng tâm G của tam giác BCD và $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$. Vậy mp($BCD$) luôn luôn đi qua điểm cố định G nói trên.

2) Vì $DH \perp BC$, $DA \perp$ mp(ABC) nên $AH \perp BC$.

Gọi O_1 là trung điểm của BC thì $OO_1 \perp (BCA) \Rightarrow OO_1 \perp AH$, từ đó $AH \perp HO$. Điều này khẳng định điểm H thuộc mặt cầu đường kính AO, mặt cầu này cố định vì A, O cố định.

14. (h.60) Gọi Δ là trục của đường tròn đã cho thì $\Delta \,//\, SO_1$. Trong mp(SO_1, Δ), đường trung trực của SA cắt Δ tại O_2 thì O_2 là tâm mặt cầu đi qua đường tròn đã cho và điểm S, bán kính mặt cầu này bằng $O_2A = O_2S$. Xét các tam giác vuông O_2AO và O_2IS (ở đó $O_2I \,//\, AO_1$), ta có



Vậy bán kính mặt cầu là $\sqrt{R^2 + \frac{49}{16}R^2} = \frac{R\sqrt{65}}{4}$

và thể tích khối cầu phải tìm là $\frac{65}{48}\sqrt{65}\pi R^3$.

15. Trước hết, ta nhận xét rằng hình hộp nội tiếp mặt cầu phải là hình hộp chữ nhật. Từ đó, nếu kí hiệu ba kích thước của hình hộp đó là x, y, z thì $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$.

1) Thể tích khối hộp chữ nhật là $V = xyz$, từ đó $V^2 = x^2y^2z^2$. Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x^2 = y^2 = z^2 = \frac{4R^2}{3}$ hay $x = y = z = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, tức hình hộp đó là hình lập phương với cạnh bằng $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

2) Tổng độ dài các cạnh của hình hộp là $T = 4(x + y + z)$, từ đó

$$T^2 = 16(x + y + z)^2 \leq 16.3\ (x^2 + y^2 + z^2) = 192R^2.$$

Như vậy, tổng độ dài các cạnh của hình hộp đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ hay hình hộp đó là hình lập phương có cạnh bằng $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

16. (h.61) Dễ thấy $R = \frac{SA^2}{2SH}$, từ đó nếu kí hiệu cạnh đáy và chiều cao của hình chóp lần lượt là a và h thì

$$R = \frac{a^2 + 3h^2}{6h}, \qquad (1)$$

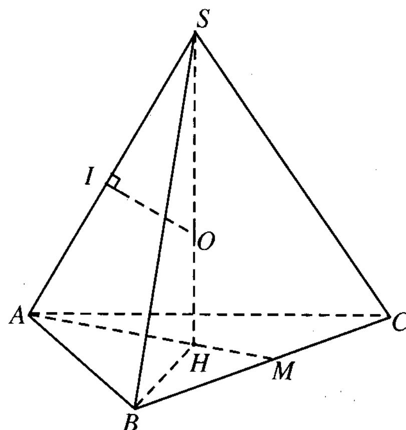
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.h. \qquad (2)$$

Từ (1), (2) ta có

$$V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}}{12}h(6Rh - 3h^2)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12}h.3h(2R - h)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}h.h(2R - h).$$



Hình 61

Mặt khác $h < 2R$ nên $V_{S.ABC}$ lớn nhất khi và chỉ khi $h.h(2R - h)$ lớn nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $h = \frac{4R}{3}$. Khi đó

$$a^2 = 3h(2R - h) = 4R\left(2R - \frac{4R}{3}\right) = \frac{8R^2}{3}, \text{ tức là } a = \frac{2R\sqrt{6}}{3}.$$

Dễ thấy trong trường hợp này, $SABC$ là tứ diện đều có cạnh bằng $\frac{2R\sqrt{6}}{3}$.

- Mở rộng bài toán cho hình chóp n–giác đều cạnh a.

Ta cũng có $R = \frac{SA^2}{2SH}$, trong đó SA là một cạnh bên và SH là đường cao của hình chóp, từ đó $R = \dfrac{a^2 + 4h^2\sin^2\frac{\pi}{n}}{8h\sin^2\frac{\pi}{n}}$, suy ra $a^2 = 4h(2R - h)\sin^2\frac{\pi}{n}$.

Gọi S là diện tích đáy của hình chóp n–giác đều cạnh a thì $S = \frac{na^2}{4}\cot\frac{\pi}{n}$. Khi ấy, thể tích V của khối chóp bằng

$$\begin{aligned}
V &= \frac{na^2}{12}\cot\frac{\pi}{n}.h \\
&= \frac{n}{12}\cot\frac{\pi}{n}.h.4h\sin^2\frac{\pi}{n}.(2R - h) \\
&= \frac{n}{3}\cot\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}.h.h(2R - h) \\
&= \frac{n}{6}\cot\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}.h.h(4R - 2h).
\end{aligned}$$

Vậy V lớn nhất khi và chỉ khi $h = \frac{4R}{3}$ và từ đó

$$a^2 = \sin^2\frac{\pi}{n}.\frac{16R}{3}\left(2R - \frac{4R}{3}\right) = \sin^2\frac{\pi}{n}.\frac{32R^2}{9},$$

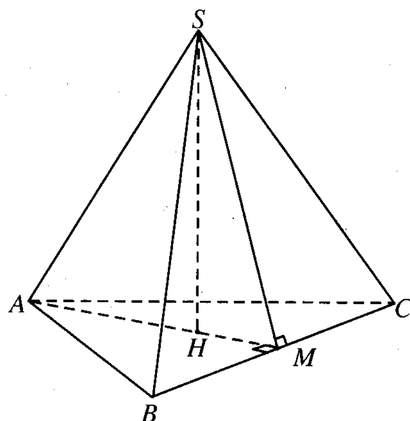
tức là $a = \frac{4R\sqrt{2}}{3}\sin\frac{\pi}{n}$.

Như thế, trong số các hình chóp n–giác đều nội tiếp một mặt cầu bán kính R cho trước thì hình chóp n–giác đều có chiều cao $h = \frac{4R}{3}$ và cạnh đáy $a = \frac{4R\sqrt{2}}{3}\sin\frac{\pi}{n}$ có thể tích lớn nhất.

17. (h.62) Kí hiệu cạnh đáy của hình chóp là a, chiều cao là h, thể tích khối chóp là V, diện tích toàn phần là S_{tp} thì $r = \frac{3V}{S_{tp}}$, tức là $S_{tp} = \frac{3V}{r}$. Vậy S_{tp} nhỏ nhất khi và chỉ khi V nhỏ nhất. Mặt khác, cũng từ hệ thức $S_{tp} = \frac{3V}{r}$, ta có hệ thức liên hệ giữa a, h và r là

$$r = \frac{ah}{a + \sqrt{a^2 + 12h^2}} \quad (1)$$

$$\left(V = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.h = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2.h\right).$$



Hình 62

Gọi M là trung điểm của BC và đặt $\widehat{SMH} = \varphi$ (đó là góc giữa mp(SBC) và mp(ABC), cũng là góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp). Khi ấy,

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{6}\tan\varphi. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta có $a = \frac{6r(\cos\varphi + 1)}{\sqrt{3}\sin\varphi}$, từ đó thay vào (2), ta có $h = \frac{r(\cos\varphi + 1)}{\cos\varphi}$.

Suy ra $a^2 = 12r^2\frac{1 + \cos\varphi}{1 - \cos\varphi}$.

Vậy $V = \frac{\sqrt{3}}{12}.12r^2.\frac{1 + \cos\varphi}{1 - \cos\varphi}.r.\frac{1 + \cos\varphi}{\cos\varphi}$

$$= \sqrt{3}.r^3\frac{(1 + \cos\varphi)^2}{\cos\varphi(1 - \cos\varphi)} = \sqrt{3}r^3\frac{(1 + t)^2}{t(1 - t)} \text{ với } 0 < t = \cos\varphi < 1.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{(1 + t)^2}{t(1 - t)}$, $0 < t < 1$, thì V nhỏ nhất khi và chỉ khi $f(t)$ nhỏ nhất.

Ta có $f'(t) = \dfrac{2(1+t)t(1-t)-(1+t)^2(1-2t)}{t^2(1-t)^2} = \dfrac{2(t-t^3)-(1-3t^2-2t^3)}{t^2(1-t)^2}$

$= \dfrac{3t^2+2t-1}{t^2(1-t)^2}.$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$. Xét bảng biến thiên sau

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(t)$	▨	$-$	0	$+$	▨
$f(t)$	▨	↘		↗	▨

Vậy $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = \dfrac{1}{3}$, tức là $\cos\varphi = \dfrac{1}{3}$. Khi đó $h = 4r$, $\tan\varphi = 2\sqrt{2}$, từ đó $a = 2r\sqrt{6}$.

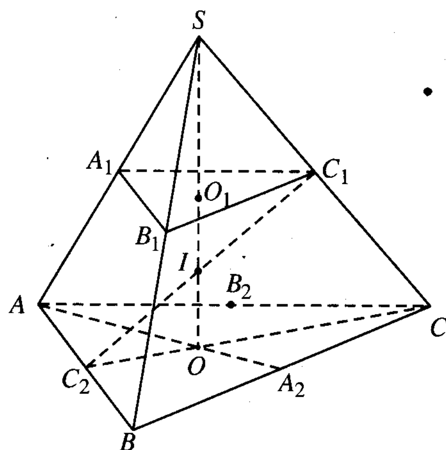
Vậy khi $a = 2r\sqrt{6}$, $h = 4r$ thì diện tích toàn phần của hình chóp đạt giá trị nhỏ nhất.

18. (h.63)

1) Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC và A_2, B_2, C_2 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Vì AB, AC là hai tiếp tuyến với mặt cầu tại B_2, C_2 nên $AB_2 = AC_2$. Suy ra $AB = AC$.

Tương tự ta có $BA = BC$.

Vậy $AB = AC = BC$, nghĩa là ABC là tam giác đều.



Hình 63

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC thì O cũng là tâm của tam giác đều $A_2B_2C_2$. Kí hiệu O_1 là giao điểm của SO và mp$(A_1B_1C_1)$ thì O_1 cũng là tâm của tam giác đều $A_1B_1C_1$ (vì phép vị tự tâm S, tỉ số $\dfrac{1}{2}$ biến tam giác ABC thành tam giác $A_1B_1C_1$). Do mp$(A_1B_1C_1)$ song song với mp(ABC) nên O_1O đi qua tâm I của mặt cầu, đồng thời O_1O vuông góc với cả hai mặt phẳng đó, từ đó $SA = SB = SC$. Vậy $S.ABC$ là hình chóp đều.

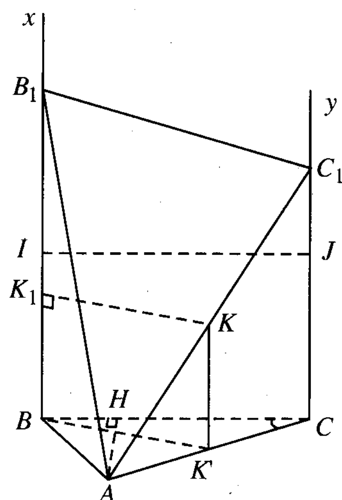
2) Dễ thấy tâm I của mặt cầu là trung điểm của O_1O và bán kính r của mặt cầu bằng IC_2. Ta có $IC_2^2 = IO^2 + OC_2^2 = \frac{h^2}{16} + \frac{a^2}{12}$.

Vậy diện tích mặt cầu đó bằng

$$4\left(\frac{h^2}{16} + \frac{a^2}{12}\right)\pi = \pi\left(\frac{h^2}{4} + \frac{a^2}{3}\right).$$

19. (h.64)

1) • Gọi I là trung điểm của BB_1 thì mặt cầu đường kính BB_1 tiếp xúc với Cy tại J khi và chỉ khi $IJ = \frac{1}{2}BB_1$. Mặt khác, dễ thấy $IJ = BC = 2a$. Vậy $BB_1 = 4a$. Hệ thức này xác định vị trí điểm B_1.



Hình 64

• Gọi K là trung điểm của AC_1 thì mặt cầu đường kính AC_1 tiếp xúc với Bx khi và chỉ khi khoảng cách từ điểm K đến Bx bằng $\frac{1}{2}AC_1$, tức là $KK_1 = \frac{1}{2}AC_1$ hay $BK' = \frac{1}{2}AC_1$, trong đó K' là trung điểm của AC.

Dễ thấy $AB = a, AC = a\sqrt{3}$, từ đó

$$BK'^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow BK' = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Như vậy, mặt cầu đường kính AC_1 tiếp xúc với Bx khi và chỉ khi $AC_1 = a\sqrt{7}$, từ đó $CC_1^2 = 7a^2 - 3a^2 = 4a^2$, tức là $CC_1 = 2a$. Hệ thức này xác định vị trí điểm C_1. (Khi đó $J \equiv C_1$).

2) • Khi $BB_1 = 4a$, $CC_1 = 2a$ thì BB_1C_1C là hình thang vuông tại B, C với hai đáy có độ dài khác nhau nên BB_1C_1C không có đường tròn ngoại tiếp. Vậy đa diện $ABCC_1B_1$ không có mặt cầu ngoại tiếp.

• Dễ thấy $A.BCC_1B_1$ là hình chóp đỉnh A, đáy là BCC_1B_1 và mp(ABC) vuông góc với mp(BCC_1B_1). Từ đó

$$V_{A.BCC_1B_1} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}(BB_1 + CC_1).BC.AH$$

(AH là đường cao của tam giác vuông ABC)

hay $V_{A.BCC_1B_1} = \frac{1}{6}(4a + 2a).\ AB.\ AC = \frac{1}{6}.6a.a.a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$.

§2, §3. Khái niệm về mặt tròn xoay. Mặt trụ, hình trụ và khối trụ

20. 1) Kí hiệu bán kính đáy và chiều cao hình trụ đó lần lượt là R và h. Khi đó

$$S_{\text{đ}} = \pi R^2 = 4\pi a^2,\ S_{xq} = S = 2\pi Rh.$$

Từ các hệ thức trên, ta có $R = 2a$ và $h = \frac{S}{4\pi a}$. Như vậy thể tích khối trụ là

$$V = \pi R^2 h = \pi.4a^2.\frac{S}{4\pi a} = Sa.$$

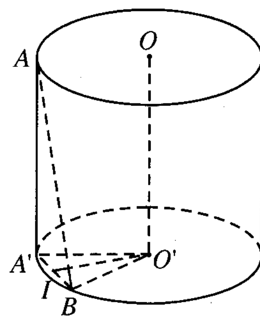
2) Thiết diện qua trục của hình trụ là hình chữ nhật có các kích thước là $2R$ và h. Vậy diện tích thiết diện qua trục là

$$2Rh = 4a.\frac{S}{4\pi a} = \frac{S}{\pi}.$$

21. (h.65)

1) Gọi AA' là một đường sinh của hình trụ thì $AA' = h$ và AA' // OO', khi ấy $\alpha = \widehat{BAA'}$ là góc giữa AB và OO' và $\cos\alpha = \frac{AA'}{AB} = \frac{h}{a}$. Điều này khẳng định góc giữa AB và OO' không đổi.

2) Gọi I là trung điểm của $A'B$ thì có $O'I \perp$ mp($AA'B$), mặt khác OO' // mp($AA'B$), vậy $O'I$ là khoảng cách giữa AB và OO'.

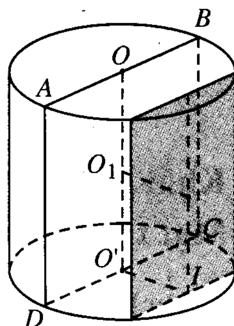


Hình 65

Vì $O'I$ là trung tuyến của tam giác $A'O'B$ có ba cạnh là $A'B = \sqrt{a^2 - h^2}$, $O'A' = O'B = R$ nên $O'I$ có độ dài không đổi. Dễ thấy $O'I = \sqrt{R^2 - \frac{a^2 - h^2}{4}}$.

22. (h.66)

1) Giả sử thiết diện qua trục OO' của hình trụ là hình vuông $ABCD$. Khi đó $AB = AD = 2R$. Gọi O_1 là trung điểm của OO' thì mặt cầu tâm O_1, bán kính O_1B là mặt cầu ngoại tiếp hình trụ.



Hình 66

Dễ thấy $O_1B = R\sqrt{2}$. Vậy diện tích mặt cầu là $4\pi\left(R\sqrt{2}\right)^2 = 8\pi R^2$ và thể tích khối cầu là $\frac{4}{3}\pi\left(R\sqrt{2}\right)^3 = \frac{8}{3}\pi R^3\sqrt{2}$.

2) Mặt phẳng (P) song song với OO' nên cắt hình trụ theo thiết diện là hình chữ nhật có một cạnh bằng AD, cạnh còn lại theo giả thiết bằng R. Vậy diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi (P) là $R.2R = 2R^2$.

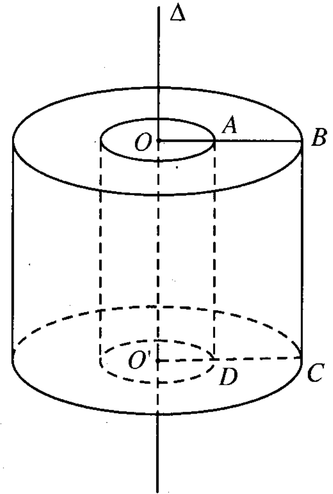
Vì $(P) // OO'$ nên khoảng cách từ tâm O_1 của mặt cầu ngoại tiếp hình trụ đến (P) bằng khoảng cách từ O' đến (P) và bằng $O'I$ (I là trung điểm của dây cung nói trong giả thiết). Ta có $O'I^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3R^2}{4}$. Tức là $O'I = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Vì mp$(P)$ cắt mặt cầu trên theo đường tròn nên bán kính r của đường tròn được tính theo công thức :

$$r^2 = O_1B^2 - O'I^2 = 2R^2 - \frac{3R^2}{4} = \frac{5R^2}{4}.$$

Vậy diện tích thiết diện của mặt cầu ngoại tiếp hình trụ đã cho khi cắt bởi mp(P) là $S = \frac{5\pi R^2}{4}$.

23. (h.67)

1) Kí hiệu O, O' lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AB, CD với Δ. Gọi V là thể tích cần tìm, V_2 là thể tích hình trụ tạo nên khi quay hình chữ nhật $OBCO'$ quanh Δ (với $OA < OB$) hoặc hình tạo nên khi quay hình chữ nhật $OADO'$ quanh Δ (với $OA > OB$) ; V_1 là thể tích hình trụ tạo nên khi quay hình chữ nhật $OADO'$ quanh Δ (với $OA < OB$) hoặc hình trụ tạo nên khi quay hình chữ nhật $OBCO'$ quanh Δ (với $OA > OB$). Khi đó $V = V_2 - V_1$.



Hình 67

Từ đó, với $OA < OB$ thì

$$V = \pi OB^2.BC - \pi OA^2.AD = 2a\pi\left[(x+a)^2 - x^2\right] = 2a^2\pi(2x+a)$$

và với $OA > OB$ thì

$$V = \pi OA^2.AD - \pi OB^2.BC = 2a\pi\left[x^2 - (x-a)^2\right] = 2a^2\pi(2x-a).$$

2) Thể tích khối cầu bán kính bằng AB là $\frac{4}{3}\pi a^3$. Theo giả thiết ta có

$$4\pi a^3 = 2\pi a^2(2x+a) \text{ (với } OA < OB)$$

hoặc $$4\pi a^3 = 2\pi a^2(2x-a) \text{ (với } OA > OB).$$

Từ đó $x = \frac{a}{2}$ (với $OA < OB$) hoặc $x = \frac{3a}{2}$ (với $OA > OB$).

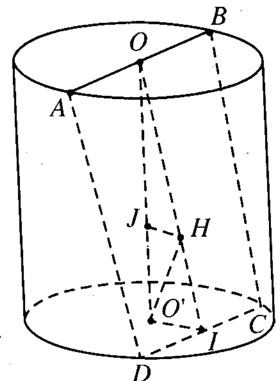
24. (h.68)

1) Gọi I là trung điểm của CD thì $O'I \perp CD$, từ đó $OI \perp CD$. Vậy $\alpha = \widehat{OIO'}$.

Dễ thấy $AB \parallel CD$, tức là $ABCD$ là hình thang. Mặt khác $OI \perp CD$ nên $OI \perp AB$. Vậy $ABCD$ là hình thang cân.

Diện tích S của $ABCD$ được tính bởi.

$$S = \frac{1}{2}(AB + CD).\ OI$$



Hình 68

Ta có : $AB = 2R$, $OI = \dfrac{OO'}{\sin\alpha} = \dfrac{h}{\sin\alpha}$,

$$O'I = OO'\cot\alpha \Rightarrow ID = \sqrt{O'D^2 - O'I^2} = \sqrt{R^2 - h^2\cot^2\alpha}$$

$$\Rightarrow CD = 2\sqrt{R^2 - h^2\cot^2\alpha}.$$

Vậy $S = \dfrac{1}{2}\left(2R + 2\sqrt{R^2 - h^2\cot^2\alpha}\right).\dfrac{h}{\sin\alpha} = \left(R + \sqrt{R^2 - h^2\cot^2\alpha}\right).\dfrac{h}{\sin\alpha}$.

2) Trong mặt phẳng $(OO'I)$, kẻ $O'H \perp OI$ thì H là hình chiếu của điểm O' trên mp(P).

Xét tam giác vuông $O'IH$, ta có $O'H = O'I\sin\alpha = h.\cot\alpha.\sin\alpha = h.\cos\alpha$.

Kẻ đường cao HJ của tam giác vuông $O'HO$ thì $O'J.OO' = O'H^2$

$\Rightarrow O'J = \dfrac{O'H^2}{OO'} = h.\cos^2\alpha$, từ đó suy ra J là điểm cố định.

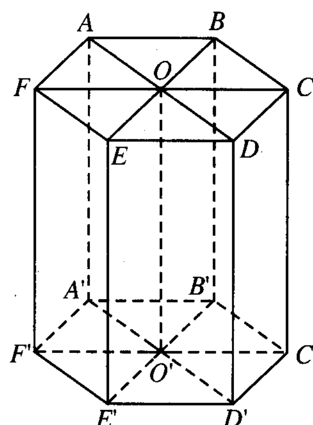
Mặt khác $HJ^2 = O'H^2 - O'J^2 = h^2.\cos^2\alpha - h^2.\cos^4\alpha = h^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha$.

Vậy HJ có độ dài không đổi, từ đó ta có điểm H thuộc đường tròn tâm J, bán kính cho trước, trong mặt phẳng vuông góc với OO' tại J.

Chú ý. Cũng có thể thấy H thuộc mặt trụ $\mathcal{T}$ có trục là OO', bán kính đáy R' cho trước, cụ thể $R' = h.\cos\alpha.\sin\alpha$, đồng thời H thuộc mặt phẳng vuông góc với trục OO' tại điểm J. Từ đó H thuộc đường tròn là giao của mặt trụ $\mathcal{T}$ và mặt phẳng nói trên.

25. (h.69)

1) Hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho có trục là OO' (O, O' là tâm hai đáy của hình lăng trụ) và đường tròn đáy của hình trụ này là đường tròn ngoại tiếp đáy của hình lăng trụ.



Hình 69

Dễ thấy bán kính đường tròn đáy của hình trụ ngoại tiếp bằng a. Vậy diện tích xung quanh của hình trụ đó là $S_1 = 2\pi ah$, thể tích khối trụ đó là $V_1 = \pi a^2 h$.

2) Hình trụ nội tiếp hình lăng trụ đã cho có trục là OO', đường tròn đáy của hình trụ này là đường tròn nội tiếp đáy hình lăng trụ.

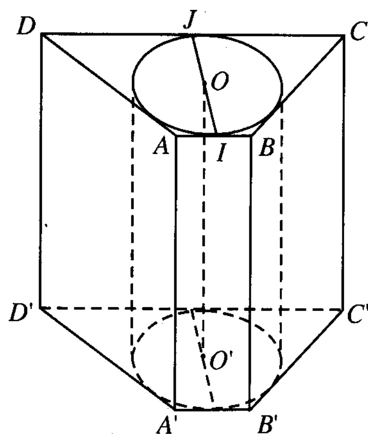
Dễ thấy bán kính đường tròn đáy của hình trụ nội tiếp bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy : diện tích toàn phần của hình trụ đó là

$$S_2 = 2\pi.\frac{a\sqrt{3}}{2}.h + 2.\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \pi a\sqrt{3}\left(h + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right),$$

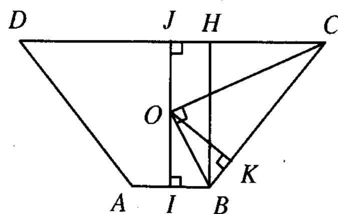
thể tích hình trụ đó là

$$V_2 = \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2.h = \frac{3}{4}\pi a^2 h.$$

26. (h.70a, b)



Hình 70a



Hình 70b

1) Vì hình lăng trụ đã cho là hình lăng trụ đứng nên chỉ cần chứng minh đáy $ABCD$ có đường tròn nội tiếp.

Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $IJ \perp AB$, $IJ \perp CD$. Gọi O là trung điểm của IJ thì $OI = OJ = \frac{IJ}{2}$. Kẻ $BH \perp CD$.

Ta có $IJ = BH = \sqrt{BC^2 - HC^2}$

$$= \sqrt{\frac{25a^2}{4} - \left(2a - \frac{a}{2}\right)^2} = 2a.$$

Vậy $OI = OJ = a$.

Mặt khác $OB^2 = OI^2 + IB^2$

$$= a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4},$$

$$OC^2 = OJ^2 + JC^2$$
$$= a^2 + 4a^2 = 5a^2,$$

từ đó ta có $BC^2 = OB^2 + OC^2$.

Kẻ đường cao OK của tam giác vuông OBC thì $OK.BC = OB.OC$, suy ra

$$OK = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2}.a\sqrt{5}}{\frac{5a}{2}} = a.$$

Vậy O là tâm đường tròn nội tiếp hình thang cân $ABCD$.

Vậy hình trụ có trục OO' (O, O' là tâm hai đường tròn đáy) và bán kính đáy bằng a chính là hình trụ nội tiếp hình lăng trụ đã cho.

2) Diện tích toàn phần của hình trụ đó là

$$S = 2\pi a^2 + 2\pi ah = 2\pi a(a + h)$$

và thể tích hình trụ đó là

$$V = \pi a^2 h.$$

Chú ý. Có thể giải thích $ABCD$ có đường tròn nội tiếp bởi điều kiện

$$AB + CD = BC + AD.$$

27. (h.71)

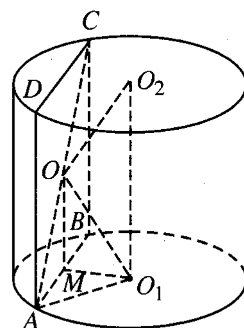
Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên O là trung điểm của AC.

Gọi M là trung điểm của AB thì $O_1M \perp AB$, $OM \perp AB$ và theo giả thiết, $AO = AO_1$.

Hai tam giác vuông MAO và MAO_1 có MA chung, $OA = O_1A$ nên $OM = O_1M$.

Từ đó $\widehat{OO_1M} = 45^\circ$, do đó $\widehat{OO_1O_2} = 45^\circ$.

Dễ thấy ΔO_1OO_2 cân tại O, vậy $\widehat{O_1OO_2} = 90^\circ$.



Hình 71

28. (h.72)

1) Từ $S_{xq} = 2\pi R.OO_1$ (R là bán kính đáy)

$$S_{tp} = 2\pi R(R + OO_1),$$

ta có $\dfrac{S_{tp}}{S_{xq}} = \dfrac{R}{OO_1} + 1 = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$.

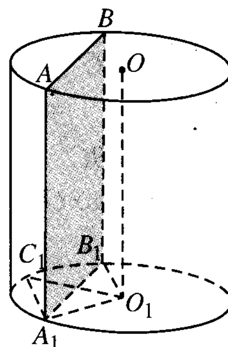
Vậy $S_{tp} = \dfrac{3}{2}.4\pi = 6\pi$.

2) Ta có $4\pi = S_{xq} = 2\pi R.OO_1 = 2\pi.R.2R$

$$\Rightarrow R = 1.$$

Thể tích khối trụ là

$$V = \pi R^2.OO_1 = 2\pi R^3 = 2\pi.$$



Hình 72

3) Gọi A_1C_1 là một cạnh của n–giác đều nội tiếp đáy hình trụ thì

$\widehat{A_1O_1C_1} = \frac{2\pi}{n}$ và diện tích đáy hình lăng trụ bằng

$$S_n = n.S_{\Delta A_1O_1C_1} = n.\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}.$$

$$V_n = S_n.OO_1 = n\sin\frac{2\pi}{n}.$$

4) Đường tròn lớn của hình cầu ngoại tiếp hình trụ là đường tròn ngoại tiếp thiết diện qua trục. Vậy bán kính mặt cầu là $R_C = R\sqrt{2}$ (R là bán kính đáy của hình trụ). Từ đó thể tích khối cầu phải tìm là

$$V_C = \frac{4}{3}\pi(R_C)^3 = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}.$$

5) Với thiết diện ABB_1A_1 như hình vẽ, ta có $\widehat{A_1O_1B_1} = 120^o$, từ đó

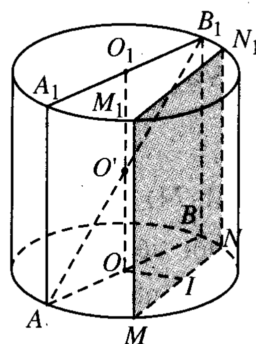
$$A_1B_1 = 2R\sin 120^o = R\sqrt{3}.$$

Vậy $A_1B_1 = \sqrt{3}$.

Do đó diện tích thiết diện là : $A_1B_1.AA_1 = \sqrt{3}.2 = 2\sqrt{3}$.

29. (h.73) Gọi O' là trung điểm của trục O_1O của hình trụ thì O' là tâm mặt cầu đã cho. Kí hiệu h và r lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của hình trụ thì diện tích thiết diện qua trục là

$$S_{td} = 2r.h.$$



Hình 73

Mặt khác $R^2 = O'A^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} \Rightarrow r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$.

Từ đó $S_{td} = h\sqrt{4R^2 - h^2} = \sqrt{h^2(4R^2 - h^2)}$.

Vậy S_{td} lớn nhất khi và chỉ khi $h = R\sqrt{2}$.

Khi đó $r = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}.2R^2} = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{2}$, tức là thiết diện qua trục là hình vuông.

1) $V = \pi r^2 h = 2\pi r^2.r = 2\pi r^3 = \frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2}$,

$S_{tp} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 3\pi R^2$.

2) • Dễ thấy diện tích đáy của hình lăng trụ n–giác đều nội tiếp hình trụ là $\frac{n}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}$. Vậy thể tích hình lăng trụ đó là

$$V_{l.trụ} = \frac{n}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}.2r = nr^3\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{nR^3}{2\sqrt{2}}\sin\frac{2\pi}{n}.$$

• Xét đa giác đều n cạnh ngoại tiếp đường tròn đáy hình trụ thì độ dài cạnh của đa giác bằng $2r\tan\frac{\pi}{n}$, từ đó diện tích đáy hình lăng trụ là

$$S_{đáy} = n.\frac{1}{2}2r.\tan\frac{\pi}{n}.r = nr^2\tan\frac{\pi}{n}.$$

Vậy thể tích hình lăng trụ n–giác đều ngoại tiếp hình trụ là

$$nr^2\tan\frac{\pi}{n}.2r = 2nr^3.\tan\frac{\pi}{n} = \frac{nR^3}{\sqrt{2}}\tan\frac{\pi}{n}.$$

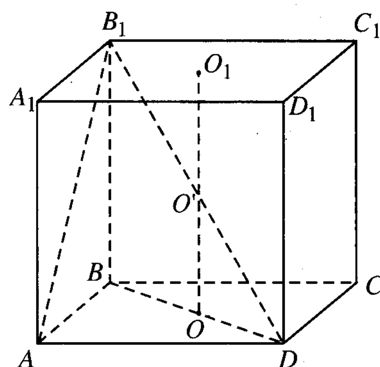
3) Giả sử thiết diện là MNN_1M_1 thì MNN_1M_1 là hình chữ nhật. Gọi I là trung điểm của MN thì

$$OI = \frac{R}{2} \text{ và } IM = \sqrt{r^2 - \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}} = \frac{R}{2}.$$

Vậy diện tích thiết diện MNN_1M_1 là

$$MN.NN_1 = 2IM.h = R.R\sqrt{2} = R^2.\sqrt{2}.$$

30. (h.74) Vì hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ nội tiếp hình trụ nên $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình hộp chữ nhật, trục hình trụ là OO_1 (đoạn nối tâm hai đáy của hình hộp) và khoảng cách từ OO_1 đến mặt phẳng (ABB_1A_1) bằng nửa AD. Từ đó $AD = 3a$.



Hình 74

BD là đường kính của đường tròn đáy hình trụ nên $BD = 5a$, suy ra

$AB^2 = BD^2 - AD^2 = 16a^2$, tức là $AB = 4a$.

Dễ thấy $\widehat{DB_1A}$ là góc giữa B_1D và mặt phẳng (ABB_1A_1), theo giả thiết thì $\widehat{DB_1A} = 30^o$, từ đó $B_1D = 2AD = 6a$.

Vậy $BB_1^2 = B_1D^2 - BD^2 = 36a^2 - 25a^2 = 11a^2$, tức là $BB_1 = a\sqrt{11}$.

Do đó thể tích hình hộp đã cho là

$$V = AB.\ AD.\ BB_1 = 4a.3a.\ a\sqrt{11} = 12a^3\sqrt{11}.$$

Gọi O' là trung điểm của OO_1 thì O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ và bán kính của mặt cầu đó là $R = \frac{1}{2}B_1D = 3a$.

Từ đó thể tích hình cầu phải tìm là

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.27.a^3 = 36\pi a^3.$$

§4. Mặt nón, hình nón và khối nón

31. (h.75) Gọi V_1 là thể tích phần hình nón giữa đỉnh S và mp(P), V_2 là thể tích phần hình nón giữa hai mặt phẳng (P) và (Q), V_3 là thể tích phần hình nón giữa mặt phẳng (Q) và đáy hình nón đã cho. Khi ấy

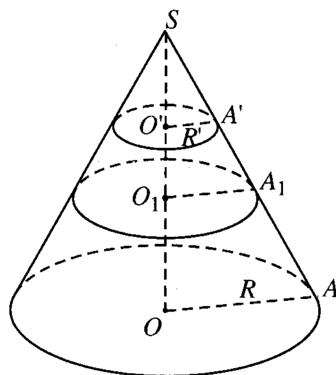
$$\frac{V_1}{V_1 + V_2} = \left(\frac{R'}{x}\right)^3, \qquad (1)$$

$$\frac{V_1 + V_2 + V_3}{V_1 + V_2} = \left(\frac{R}{x}\right)^3 \qquad (2)$$

và $\quad V_3 = V_2. \qquad (3)$

Từ (2), (3) suy ra

$$\frac{V_1 + 2V_2}{V_1 + V_2} = \left(\frac{R}{x}\right)^3. \qquad (4)$$



Hình 75

Từ (1) và (4) ta có

$$\frac{2(V_1 + V_2)}{V_1 + V_2} = \frac{R^3 + R'^3}{x^3} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{R^3 + R'^3}{2}}.$$

32. (h.76)

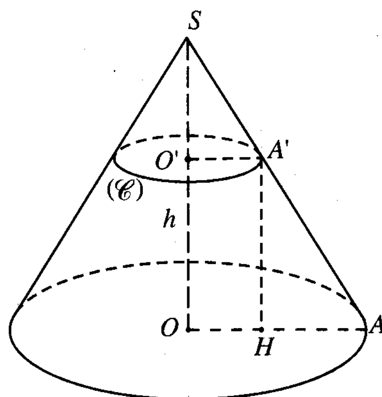
1) Gọi đường cao của hình nón là SO, một đường sinh của hình nón là SA thì $\widehat{SAO} = \alpha$.

Gọi O', A' lần lượt là giao của SO, SA với mp(P) và H là hình chiếu của A' trên OA thì

$$AH = A'H\cot\alpha = h\cot\alpha$$

và bán kính của đường tròn ($\mathscr{C}$) là

$$R' = O'A' = OA - HA = R - h\cot\alpha.$$



Hình 76

2) • Gọi S_1 là phần diện tích phải tìm, S_2 là phần diện tích xung quanh hình nón đỉnh S và đáy là ($\mathscr{C}$). Khi đó $S_1 = S - S_2$ (S là diện tích xung quanh của hình nón $\mathscr{N}$), tức là

$$S_1 = \pi R.SA - \pi R'.SA'$$
$$= \pi\left(R.\frac{R}{\cos\alpha} - R'.\frac{R'}{\cos\alpha}\right)$$
$$= \frac{\pi}{\cos\alpha}\left[R^2 - (R - h\cot\alpha)^2\right]$$
$$= \frac{\pi}{\cos\alpha}h.\cot\alpha(2R - h\cot\alpha) = \frac{\pi h}{\sin\alpha}(2R - h\cot\alpha).$$

• Gọi V_1 là phần thể tích cần tìm, V_2 là phần thể tích khối nón đỉnh S và đáy là đường tròn ($\mathscr{C}$). Khi đó

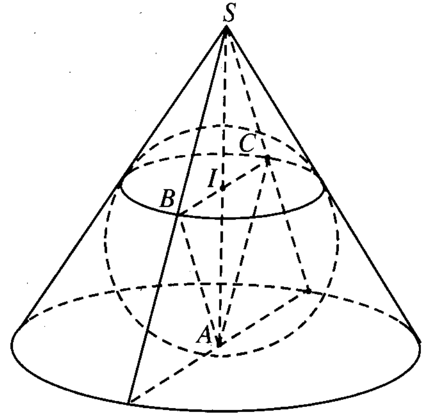
$$V_1 = V - V_2 \text{ (}V\text{ là thể tích hình nón đã cho)}$$
$$= \frac{1}{3}\pi R^2.SO - \frac{1}{3}\pi R'^2.SO'$$
$$= \frac{1}{3}\pi(R^2.R\tan\alpha - R'^2.R'\tan\alpha)$$
$$= \frac{1}{3}\pi\tan\alpha(R^3 - R'^3)$$
$$= \frac{1}{3}\pi\tan\alpha\left[R^3 - (R - h\cot\alpha)^3\right]$$
$$= \frac{\pi h}{3}(3R^2 - 3Rh\cot\alpha + h^2\cot^2\alpha).$$

33. (h.77a, b).

1) Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$. Do (P) là mặt phẳng chứa BC và vuông góc với mp(ABC) nên $AI \perp (P)$.

Mặt cầu chứa đường tròn ($\mathscr{C}$) và đi qua điểm A có tâm trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, có bán kính bằng bán kính của đường tròn này. Vậy bán kính mặt cầu là

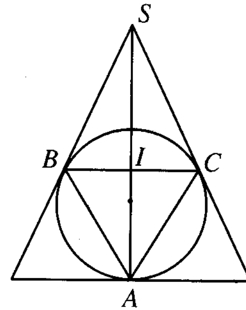
$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Hình 77a

2) Hình nón thoả mãn các giả thiết đã nêu tiếp xúc với mặt cầu tại điểm A và đỉnh S của hình nón thuộc đường thẳng AI. Dễ thấy mp(ABC) cắt mặt cầu theo đường tròn lớn và cắt hình nón theo tam giác cân có cạnh đáy đi qua A và tam giác cân này ngoại tiếp đường tròn lớn đó. Vì tam giác ABC đều nên dễ thấy tam giác cân nói trên cũng đều, từ đó cạnh của tam giác này bằng $2a$, vậy đường cao của hình nón là $SA = a\sqrt{3}$. Khi ấy thể tích khối nón phải tìm là

$$V = \frac{1}{3}\pi a^2.a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}.$$



Hình 77b

34. (h.78a, b)

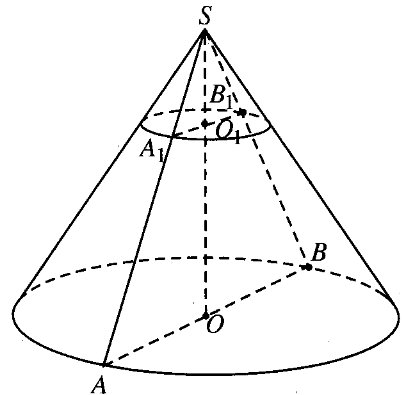
Gọi thiết diện thu được là AA_1B_1B.

Vì $SO_1 = \frac{1}{3}SO$ nên

$$A_1B_1 = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}.2R.$$

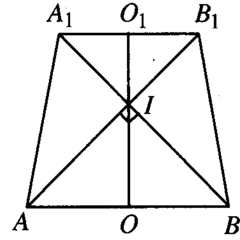
Mặt khác $AB_1 \perp A_1B$ tại I nên

$$IO = \frac{1}{2}AB, IO_1 = \frac{1}{2}A_1B_1.$$



Hình 78a

Vậy $OO_1 = R + \frac{R}{3} = \frac{4R}{3}$.



Hình 78b

Dễ thấy $SO_1 = \frac{1}{2}OO_1 = \frac{2R}{3}$.

Từ đó $SO = 2R$.

Gọi thể tích phần hình nón phải tính là V^* thì $V^* = V_1 - V_2$, trong đó :

V_1 là thể tích của hình nón $\mathcal{N}$,

V_2 là thể tích hình nón đỉnh S và đáy là thiết diện của $\mathcal{N}$ được cắt bởi (P). Ta có thể tích phần hình nón phải tính là

$$V^* = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi.OB^2.SO - \frac{1}{3}\pi O_1B_1^2.SO_1$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(R^2.2R - \frac{R^2}{9}.\frac{2R}{3}\right) = \frac{52\pi R^3}{81}.$$

35. 1) (h.79a) Kí hiệu bán kính đáy hình nón là x, chiều cao hình nón là y $(0 < x \leq R,\ 0 < y < 2R)$. Gọi SS' là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình nón thì ta có

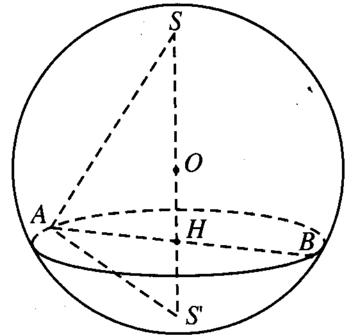
$$x^2 = y(2R - y).$$

Gọi V_1 là thể tích khối nón thì

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi y.y(2R - y)$$

$$= \frac{\pi}{6}(4R - 2y).y.y$$

$$\leq \frac{\pi}{6}\left(\frac{4R - 2y + y + y}{3}\right)^3 = \frac{32\pi R^3}{81}.$$

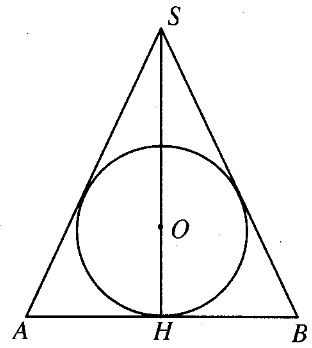


Hình 79a

Vậy thể tích V_1 đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{32\pi R^3}{81}$ khi và chỉ khi $4R - 2y = y$

$\Leftrightarrow y = \frac{4R}{3}$, từ đó $x^2 = \frac{4R}{3}\left(2R - \frac{4R}{3}\right) = \frac{8R^2}{9}$ hay $x = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$.

2) Xét mặt phẳng chứa trục của hình nón, mặt phẳng này cắt hình nón theo tam giác cân SAB và cắt mặt cầu nội tiếp hình nón theo đường tròn bán kính r và hình tròn này nội tiếp tam giác cân SAB (h.79b)



Hình 79b

Kí hiệu bán kính đáy hình nón là x, chiều cao hình nón là y ($x > 0$, $y > 2r$) thì

$$(AH + SA)\,r = \frac{1}{2}AB.SH$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)r = xy \Leftrightarrow x^2 = \frac{r^2y}{y - 2r}.$$

Vậy thể tích hình nón ngoại tiếp mặt cầu bán kính r là

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi r^2 . \frac{y^2}{y - 2r}.$$

Ta có $$\frac{y^2}{y - 2r} = \frac{y^2 - 4r^2 + 4r^2}{y - 2r} = y + 2r + \frac{4r^2}{y - 2r}$$

$$= y - 2r + \frac{4r^2}{y - 2r} + 4r$$

$$\geq 2\sqrt{(y - 2r).\frac{4r^2}{y - 2r}} + 4r = 8r.$$

Từ đó $V_2 \geq \frac{1}{3}\pi.8r^3$, tức là V_2 đạt giá trị bé nhất khi và chỉ khi

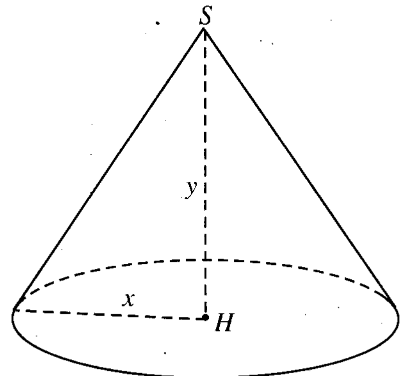
$$y - 2r = \frac{4r^2}{y - 2r} \Leftrightarrow y = 4r,$$

từ đó $x = r\sqrt{2}$.

36. (h.80)

Kí hiệu bán kính đáy và chiều cao hình nón lần lượt là x và y ($x, y > 0$). Khi đó, diện tích toàn phần của hình nón là

$\pi x\sqrt{x^2 + y^2} + \pi x^2$.



Hình 80

Theo giả thiết ta có

$$\pi x\sqrt{x^2+y^2}+\pi x^2=\pi a^2$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+y^2}+x^2=a^2$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+y^2}=a^2-x^2 \quad \text{(điều kiện } x<a\text{)}$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2+y^2)=a^4+x^4-2a^2x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2=a^4-2a^2x^2 \Leftrightarrow x^2=\frac{a^4}{y^2+2a^2}.$$

Khi đó thể tích khối nón là

$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{a^4}{y^2+2a^2}.y=\frac{\pi a^4}{3}\cdot\frac{y}{y^2+2a^2}.$$

Từ đó V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{y^2+2a^2}{y}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $\frac{y^2+2a^2}{y}=y+\frac{2a^2}{y}\geq 2\sqrt{y.\frac{2a^2}{y}}=2\sqrt{2}a.$

Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $y=\frac{2a^2}{y}$, tức là $y=a\sqrt{2}$, lúc đó $x=\frac{a}{2}$.

37. (h.81)

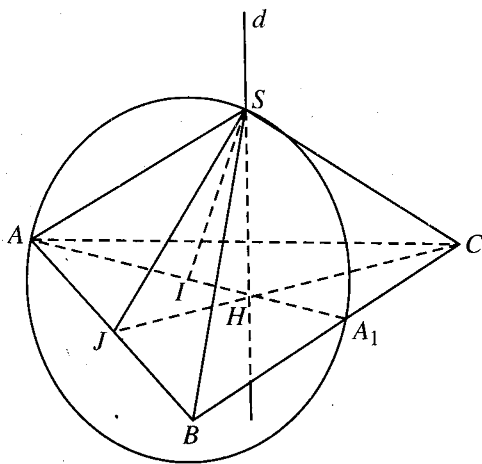
1) Hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có đỉnh là S, đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, đường cao là SH, đường sinh là SC.

Gọi S_{xq} là diện tích xung quanh của hình nón thì $S_{xq}=\pi.HC.SC$.

Ta có $HC=\frac{a\sqrt{3}}{3}$,

$$SC^2=SH^2+HC^2=SH^2+\frac{a^2}{3}$$

$$=SI^2-IH^2+\frac{a^2}{3} \quad (I \text{ là trung điểm của } AA_1).$$



Hình 81

Vì S thuộc đường tròn đường kính AA_1 nên $SI = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, ngoài ra

$$IH = AH - AI = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{12}.$$

Vậy $$SC^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{2}, \text{ tức là } SC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $$S_{xq} = \pi.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi a^2\sqrt{6}}{6}.$$

Gọi V là thể tích của hình nón nêu trên thì

$$V = \frac{1}{3}\pi.HC^2.SH = \frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{3}\sqrt{SI^2 - IH^2}$$

$$= \frac{1}{9}\pi a^2.\sqrt{\frac{3a^2}{16} - \frac{3a^2}{12^2}} = \frac{1}{9}\pi.a^2.\frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$= \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{54}.$$

2) • Gọi J là trung điểm của AB thì $CJ \perp AB$, do $SH \perp (ABC)$ nên $SJ \perp AB$. Vậy S thuộc mặt phẳng trung trực của AB. Mặt khác

$$SJ^2 = SH^2 + HJ^2 = SI^2 - IH^2 + HJ^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

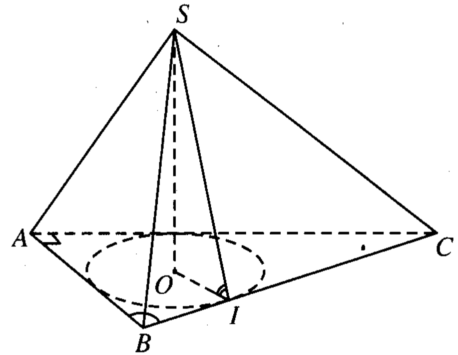
Từ đó $JS = \frac{a}{2}$.

Vậy S thuộc đường tròn (Γ) tâm J, bán kính JS nằm trong mặt phẳng trung trực của AB. Dĩ nhiên đường tròn này cố định.

• Vì S nằm trên đường tròn (Γ) tâm J và AJ vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn này nên AS thuộc mặt nón nhận (Γ) làm đường tròn đáy và trục là AJ (đỉnh A). Tương tự, BS thuộc mặt nón có đáy là đường tròn (Γ), trục là BJ (đỉnh B).

38. (h.82)

1) Đáy hình nón trong bài toán là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường cao hình nón là SO (S là đỉnh của hình chóp).



Hình 82

Gọi I là điểm tiếp xúc của BC với đường tròn nội tiếp ΔABC thì $OI \perp BC$ và $SI \perp BC$ nên $\widehat{SIO} = \beta$. Khi đó, chiều cao hình nón là

$$h = SO = OI\tan\beta = r\tan\beta,$$

độ dài đường sinh hình nón là

$$l = SI = \frac{OI}{\cos\beta} = \frac{r}{\cos\beta}.$$

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_1 = \pi rl = \pi r.\frac{r}{\cos\beta} = \frac{\pi r^2}{\cos\beta}.$$

Thể tích hình nón là

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2.r\tan\beta = \frac{1}{3}\pi r^3\tan\beta.$$

2) Dễ thấy ba đường cao của ba mặt bên hình chóp $S.ABC$ bằng nhau và cùng bằng SI.

Diện tích xung quanh của hình chóp là

$$S_2 = \frac{1}{2}(AB + AC + BC).SI.$$

Mặt khác $AC = AB\sqrt{3}$, $BC = 2AB$,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}AB^2\sqrt{3},$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB + AC + BC).r = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right).AB.r.$$

Từ đó $AB = \left(\sqrt{3} + 1\right)r$.

Vậy diện tích xung quanh của hình chóp $S.ABC$ là

$$S_2 = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right)AB.SI = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} + 1\right)r.\frac{r}{\cos\beta}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3} + 1\right)^2\frac{r^2}{\cos\beta}.$$

Thể tích hình chóp $S.ABC$ là

$$V_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AB.AC.SO = \frac{\sqrt{3}}{6}AB^2.SO, \text{ từ đó}$$

$$V_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{3}+1\right)^2 r^2.r\tan\beta$$

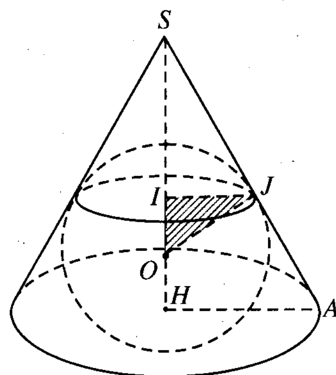
$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{3}+1\right)^2 r^3\tan\beta.$$

39. (h.83) Kí hiệu bán kính đáy và chiều cao của hình nón lần lượt là x, y (x, $y > 0$), bán kính mặt cầu nội tiếp là r, dễ tính được

$$r = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}+x}.$$

Vì diện tích hình cầu bằng diện tích đáy hình nón nên ta có : $4\pi r^2 = \pi x^2 \Leftrightarrow x = 2r$, lúc đó

$$r = \frac{2ry}{\sqrt{y^2+4r^2}+2r} \Leftrightarrow r = \frac{3y}{8}.$$



Hình 83

Gọi IJ là bán kính của đường tròn ($\mathscr{C}$), nhờ $\Delta IJO \backsim \Delta HSA$, ta có $\frac{IJ}{SH} = \frac{OJ}{AS} \Leftrightarrow IJ = \frac{SH.OJ}{SA} = \frac{y.r}{\sqrt{y^2+x^2}}$. Thay $r = \frac{3y}{8}$, $x = 2r$ vào hệ thức trên, ta được

$$IJ = \frac{y.\frac{3y}{8}}{\sqrt{y^2+\frac{9y^2}{16}}} = \frac{3y}{10}.$$

Kí hiệu diện tích phần thứ nhất của mặt xung quanh hình nón (phần có chứa đỉnh của hình nón) là S_1 và diện tích xung quanh hình nón là S_{xq} thì

$$\frac{S_1}{S_{xq}} = \left(\frac{IJ}{HA}\right)^2 = \frac{\left(\frac{3y}{10}\right)^2}{4\left(\frac{3y}{8}\right)^2} = \frac{4}{25}.$$

Kí hiệu diện tích phần thứ hai của mặt xung quanh hình nón là S_2 thì

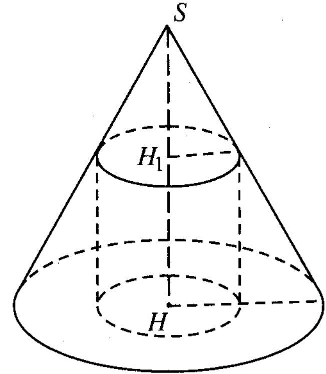
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{\frac{S_2}{S_1}}=\frac{1}{\frac{S_{xq}-S_1}{S_1}}=\frac{1}{\frac{25}{4}-1}=\frac{4}{21}.$$

40. (h.84) Dễ thấy $\frac{r}{R}=\frac{SH_1}{SH}=\frac{SH_1}{4R}\Rightarrow SH_1=4r$ và $HH_1=4(R-r)$.

1) Diện tích toàn phần của hình trụ nội tiếp hình nón tính theo r, R là

$$S_{tp}=2\pi r^2+2\pi r.4(R-r)=-6\pi r^2+8\pi Rr.$$

2) Vì chiều cao hình trụ là HH_1 được xác định bởi $HH_1=4(R-r)$ nên để tính bán kính đáy r và chiều cao h của hình trụ nội tiếp hình nón sao cho diện tích toàn phần của hình trụ đó đạt giá trị lớn nhất, chỉ cần tìm r để $S_{tp}=2\pi(-3r^2+4Rr)$ đạt giá trị lớn nhất (với $r<R$). Khi coi r thay đổi thì $S'_{tp}=2\pi(-6r+4R)$, từ đó



Hình 84

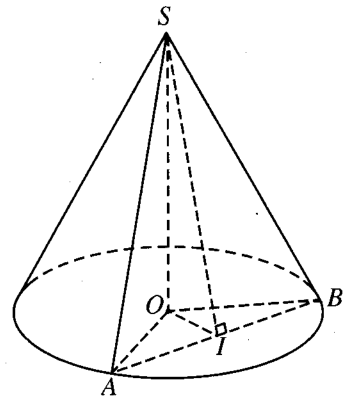
$$S'_{tp}=0\Leftrightarrow r=\frac{2}{3}R.$$

r	0		$\frac{2}{3}R$		R
S'_{tp}	▒	+	0	−	▒
S_{tp}	▒	↗		↘	▒

Vậy S_{tp} đạt giá trị lớn nhất khi $r=\frac{2}{3}R$.

Lúc đó $h=4\left(R-\frac{2}{3}R\right)=\frac{4R}{3}$.

41. (h.85) Giả sử O là tâm của đáy hình nón và mặt phẳng (α) đi qua hai đường sinh SA, SB. Gọi I là trung điểm của AB thì $OI\perp AB$ và $SI\perp AB$, từ đó $\widehat{SIO}=\varphi$. Theo giả thiết $\varphi=\widehat{ISB}$.



Hình 85

Từ tam giác vuông SIO, ta có $\sin\varphi = \frac{SO}{SI}\cdot$ (1)

Từ tam giác vuông SIB, ta cũng có $\tan\varphi = \frac{IB}{SI}\cdot$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{\sin\varphi}{\tan\varphi} = \frac{SO}{IB} = \frac{SO}{\frac{k}{2}SO} = \frac{2}{k}\cdot$ Vậy $\cos\varphi = \frac{2}{k}\cdot$

42. (h.86) Gọi I là trung điểm của AB thì $OI \perp AB$, $SI \perp AB$, $OI = a$. Ta có

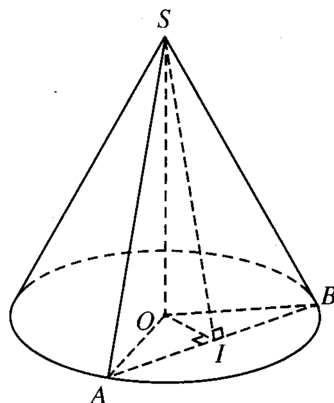
$$AO = SA\cos\widehat{SAO} = \frac{\sqrt{3}}{2}SA,$$

$$AI = SA\cos\widehat{SAI} = \frac{1}{2}SA.$$

Từ đó $\frac{AI}{AO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Mặt khác $\frac{AI}{AO} = \cos\widehat{IAO}$

$$\Rightarrow \sin\widehat{IAO} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{a}{OA}.$$

Vậy $OA = \frac{3a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.



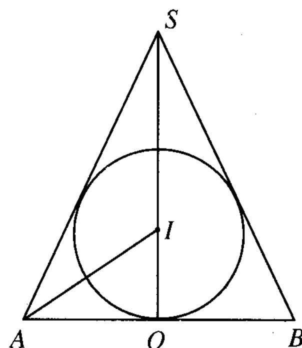
Hình 86

Xét tam giác SAO, ta có $SA = \frac{OA}{\cos 30^{\circ}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}} = a\sqrt{2}$.

Từ đó diện tích xung quanh của hình nón đã cho là

$$S_{xq} = \pi.OA.SA = \pi.\frac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{2} = \pi a^2\sqrt{3}.$$

43. (h.87) Xét mp(P) qua trục SO của hình nón thì (P) cắt hình nón theo tam giác cân SAB, (P) cắt mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp hình nón theo các đường tròn lớn có bán kính lần lượt là R và r. Các đường tròn này ngoại tiếp và nội tiếp tam giác cân SAB. Kí hiệu V_1, V_2 là thể tích của các hình cầu đã nêu thì $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{R}{r}\right)^3$.



Hình 87

Đặt $\widehat{SAB} = \alpha$ và gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔSAB thì

$$2R = \frac{AB}{\sin\widehat{ASB}} = \frac{AB}{\sin 2\alpha} \text{ và } r = IO = \frac{AB}{2}\tan\frac{\alpha}{2}.$$

Từ đó $\frac{R}{r} = \frac{1}{\sin 2\alpha \tan\frac{\alpha}{2}}$. Mặt khác $\tan\alpha = \frac{SO}{AO} = 2$, vậy

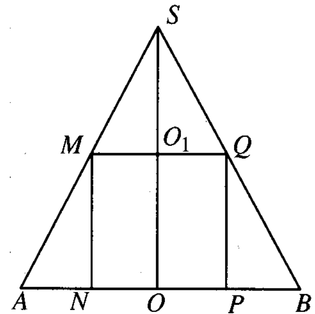
$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{4}{5},\ 2 = \tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ (do } \tan\frac{\alpha}{2} > 0).$$

Như vậy $\frac{R}{r} = \frac{5(\sqrt{5}+1)}{8}$, tức là $\frac{V_1}{V_2} = \frac{125(\sqrt{5}+1)^3}{512} = \frac{125(\sqrt{5}+2)}{64}$.

44. (h.88)

• Xét mp(α) qua trục SO của hình nón thì (α) cắt hình nón theo tam giác cân SAB, (α) cắt mặt cầu đã cho theo đường tròn lớn ngoại tiếp tam giác SAB và (α) cắt hình trụ đã nêu theo thiết diện là hình vuông $MNPQ$ (hình vuông nội tiếp ΔSAB).



Hình 88

Đặt $\widehat{SAB} = \alpha$ thì $SA = SB = 2R\sin\alpha$

và $OB = SB\cos\alpha = R\sin 2\alpha$. Từ đó diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_{xq} = \pi R.\sin 2\alpha.2R\sin\alpha = 4\pi R^2\sin^2\alpha\cos\alpha = 4\pi R^2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha.$$

Đặt $f(t) = (1-t^2)t$ với $0 < t = \cos\alpha < 1$.

Dễ thấy $f(t)$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $t = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cos\alpha$

$\Leftrightarrow \tan\alpha = \sqrt{2}$. Khi ấy $\frac{SO}{OB} = \tan\alpha = \sqrt{2}$, tức là $SO = OB\sqrt{2}$. (*)

Vậy hình nón có đường cao và bán kính đáy thoả mãn điều kiện (*) nội tiếp mặt cầu đã cho có diện tích xung quanh lớn nhất.

• Dễ thấy $\frac{SO_1}{SO} = \frac{MQ}{AB} = \frac{x}{AB}$ (đặt $MQ = MN = x$).

Khi ấy $\frac{SO - x}{SO} = \frac{x}{AB} \Rightarrow SO - x = \frac{SO}{AB}.x = \frac{\sqrt{2}x}{2}$.

Từ đó $SO = \frac{x}{2}\left(2 + \sqrt{2}\right)$. (1)

Mặt khác $SO = OB\tan\alpha = R\sin 2\alpha.\tan\alpha = 2R\sin^2\alpha$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x = \frac{4R\sin^2\alpha}{2 + \sqrt{2}} = \frac{4R.\frac{2}{3}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{8R}{3\left(2 + \sqrt{2}\right)} = \frac{4}{3}R\left(2 - \sqrt{2}\right)$.

Vậy chiều cao của hình trụ phải tìm là $\frac{4R}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right)$.

Ôn tập chương II

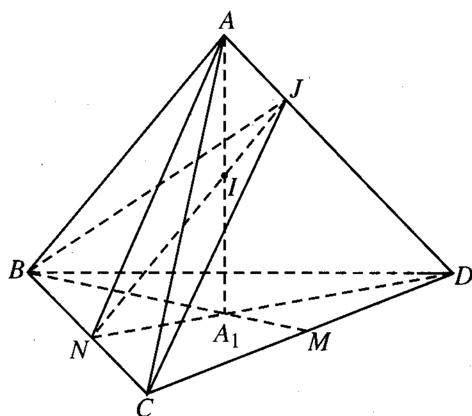
Bài tập tự luận

45. (h.89a,b) Gọi N là trung điểm của BC và J là giao điểm của NI với AD, khi đó mp(BCI) chia tứ diện đã cho thành hai tứ diện $BCDJ$ và $ABCJ$.

Dễ thấy $AJ = \frac{1}{4}AD$.

Vì $AA_1 \perp$ mp(BCD) nên mọi điểm thuộc AA_1 cách đều B, C, D. Khi đó, tâm O_1 của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $BCDJ$ là giao điểm của AA_1 với đường trung trực của JD (xét trong mp(AA_1D)).

Tương tự như trên, tâm O_2 của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCJ$ là giao của DD_1 với đường trung trực của AJ (xét trong mp(ADD_1)) (DD_1 là đường cao kẻ từ đỉnh D của tứ diện $ABCD$).

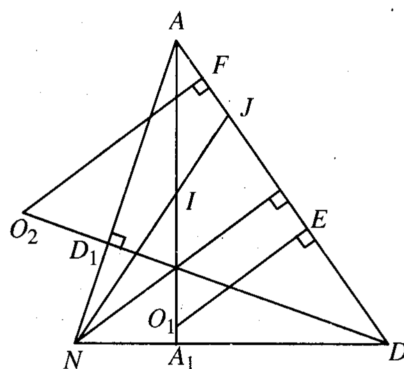


Hình 89a

Gọi E và F lần lượt là trung điểm của DJ và AJ. Xét tứ giác nội tiếp O_1A_1DE (hình 89b), ta có

$$AE.\,AD = AO_1.AA_1$$

$$\Rightarrow AO_1 = \frac{AE.AD}{AA_1}.$$



Hình 89b

Mặt khác

$$AA_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3}, AE = \frac{a}{4} + \frac{3a}{8} = \frac{5a}{8}.$$

Từ đó

$$AO_1 = \frac{5a.a}{8.\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{5a\sqrt{6}}{16}$$

và do đó $A_1O_1 = A_1A - AO_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3} - \frac{5a\sqrt{6}}{16} = \frac{a\sqrt{6}}{48}$.

Vậy bán kính R_1 của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $BCDJ$ là

$$R_1^2 = O_1D^2 = A_1O_1^2 + A_1D^2 = \frac{6a^2}{48^2} + \frac{3a^2}{9} = \frac{a^2}{48.8} + \frac{a^2}{3} = \frac{129.a^2}{48.8}$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{a\sqrt{129}}{8\sqrt{6}}.$$

Tứ giác O_2D_1FA nội tiếp đường tròn nên

$$DD_1.DO_2 = DF.DA \Rightarrow DO_2 = \frac{DF.DA}{DD_1}.$$

Mặt khác $DF = \frac{3a}{4} + \frac{a}{8} = \frac{7a}{8}$, $DA = a$, $DD_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, từ đó

$$DO_2 = \frac{\frac{7a}{8}.a}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{21a\sqrt{6}}{8.6} = \frac{7a\sqrt{6}}{16}.$$

Suy ra $D_1O_2 = \frac{7a\sqrt{6}}{16} - \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{5a\sqrt{6}}{48}$ và do đó, bán kính R_2 của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCJ$ là

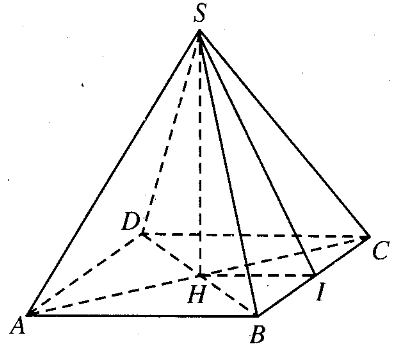
$$R_2^2 = O_2A^2 = O_2D_1^2 + D_1A^2 = \frac{25a^2.6}{48^2} + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{25a^2}{48.8} + \frac{a^2}{3} = \frac{153a^2}{48.8},$$

từ đó $R_2 = \frac{a\sqrt{153}}{8\sqrt{6}}$. Vậy $\frac{R_1}{R_2} = \frac{a\sqrt{129}}{8\sqrt{6}} : \frac{a\sqrt{153}}{8\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{43}{51}}$.

46. (h.90) Gọi x là độ dài cạnh đáy, y là chiều cao của hình chóp ; R, r lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp thì dễ tính được $R = \frac{x^2 + 2y^2}{4y}$,

$r = \frac{xy}{x + \sqrt{x^2 + 4y^2}}$. Vậy

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 = \left[\frac{\left(x^2 + 2y^2\right)\left(x + \sqrt{x^2 + 4y^2}\right)}{4xy^2}\right]^3.$$



Hình 90

Từ đó $\frac{V_1}{V_2}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{R}{r}$ nhỏ nhất.

Gọi φ là góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp thì $\varphi = \widehat{SIH}$ (I là trung điểm của BC). Khi đó $y = \frac{x}{2}\tan\varphi \Rightarrow 4y^2 = x^2\tan^2\varphi$, từ đó

$$\frac{R}{r} = \frac{\left(x^2 + \frac{x^2\tan^2\varphi}{2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 + x^2\tan^2\varphi}\right)}{x^3\tan^2\varphi}$$

$$= \frac{(2 + \tan^2\varphi)\left(1 + \frac{1}{\cos\varphi}\right)}{2\tan^2\varphi} = \frac{\left(1 + \frac{1}{\cos^2\varphi}\right)\left(\frac{\cos\varphi + 1}{\cos\varphi}\right)}{2\frac{1 - \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}}$$

$$= \frac{1 + \cos^2\varphi}{2\cos\varphi(1 - \cos\varphi)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1 + t^2}{t(1 - t)} \text{ với } 0 < t = \cos\varphi < 1.$$

Như vậy, $\frac{V_1}{V_2}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $f(t) = \frac{1 + t^2}{t(1 - t)}$ đạt giá trị nhỏ nhất ($0 < t < 1$).

Ta có : $f'(t) = \dfrac{2t(t - t^2) - (1 - 2t)(1 + t^2)}{[t(1 - t)]^2}$

$$= \frac{2t^2 - 2t^3 - 1 + 2t - t^2 + 2t^3}{[t(1 - t)]^2} = \frac{t^2 + 2t - 1}{t^2(1 - t)^2}.$$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 + \sqrt{2}$ (do $0 < t < 1$)

Ta có bảng biến thiên

t	0		$-1 + \sqrt{2}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘		↗	

Vậy $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = -1 + \sqrt{2}$, tức là $\cos\varphi = -1 + \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow 1 + \tan^2\varphi = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\varphi = \frac{1 - 3 + 2\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} - 1)^2} = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} = 2(\sqrt{2} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \tan\varphi = \sqrt{2\sqrt{2} + 2}.$$

Vậy hệ thức liên hệ giữa x và y là $y = x\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2} + 2}}{2}$.

Khi đó $\dfrac{V_1}{V_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

47. • Vì $IA = IB = 2a$, $\widehat{AIB} = 120^\circ$ nên $AB^2 = IA^2 + IB^2 - 2IA.IB\cos\widehat{AIB} = 12a^2$, từ đó $AB = 2a\sqrt{3}$. Do $CD \perp$ mp(AIB) tại I, $IA = IB$ nên $CA = CB$. Kết hợp với giả thiết ABC là tam giác vuông, ta có ABC là tam giác vuông tại C và $CA = CB = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = a\sqrt{6}$.

Vì ABD là tam giác đều nên $AD = AB = 2a\sqrt{3}$.

Từ đó $CI^2 = AC^2 - AI^2 = 6a^2 - 4a^2 = 2a^2$, tức là $CI = a\sqrt{2}$,

$DI^2 = AD^2 - AI^2 = 12a^2 - 4a^2 = 8a^2$, tức là $DI = 2a\sqrt{2}$.

• Hai điểm C, D thuộc đường thẳng Δ vuông góc với mp(AIB) tại điểm I nên có hai trường hợp xảy ra.

Trường hợp 1. C, D nằm về hai phía đối với điểm I (h. 91a).

Dễ thấy $CD = 3a\sqrt{2}$, từ đó $CD^2 = 18a^2$; mặt khác $AC^2 + AD^2 = 18a^2$, tức là $CD^2 = AC^2 + AD^2$. Như vậy $\widehat{CAD} = 90^{\circ}$. Tương tự ta cũng có $\widehat{CBD} = 90^{\circ}$.

1) $V_{ABCD} = V_{D.AIB} + V_{C.AIB} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AI.BI\sin\widehat{AIB}.(ID + IC)$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.2a.2a.\frac{\sqrt{3}}{2}.3a\sqrt{2} = a^3\sqrt{6}.$$

Gọi S_{tp} là diện tích toàn phần của tứ diện $ABCD$ thì

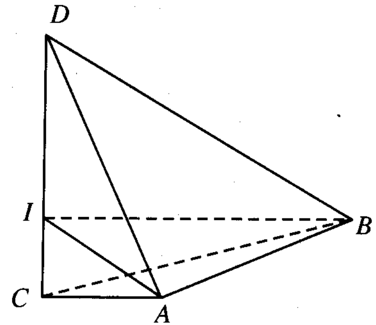
$$S_{tp} = S_{ACD} + S_{BCD} + S_{ABC} + S_{ABD}$$

$$= 2.\frac{1}{2}CD.AI + \frac{AC^2}{2} + \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= 3a\sqrt{2}.2a + \frac{1}{2}.6a^2 + 12a^2.\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= 6a^2\sqrt{2} + 3a^2 + 3a^2\sqrt{3}$$

$$= 3a^2(1 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}).$$



Hình 91a

2) Vì $\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = 90^{\circ}$ nên CD là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, từ đó bán kính mặt cầu phải tìm bằng $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ và diện tích mặt cầu bằng $18\pi a^2$.

3) Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$ thì dễ thấy $r = \frac{3V_{ABCD}}{S_{tp}}$,

từ đó $r = \dfrac{3a^3\sqrt{6}}{3a^2\left(1 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}\right)}$

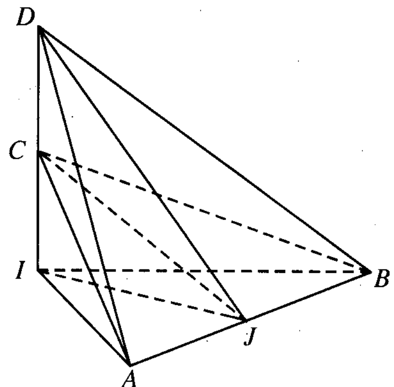
$$= \frac{a\sqrt{6}}{1 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}}.$$

Trường hợp 2. C, D nằm về một phía đối với điểm I (h.91b).

1) $V_{ABCD} = V_{DAIB} - V_{CAIB} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$,

$$S_{tp} = 2a^2\sqrt{2} + 3a^2 + 3a^2\sqrt{3}$$

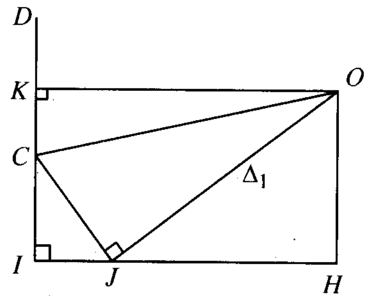
$$= a^2\left(3 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}\right).$$



Hình 91b

2) Gọi J là trung điểm của AB thì $JA = JB = JC$.

Xét đường thẳng Δ_1 đi qua J và vuông góc với mp(ABC). Khi đó, mọi điểm thuộc Δ_1 cách đều các điểm A, B, C và Δ_1 nằm trong mp(CDJ) (do mp(CDJ) vuông góc với mp(ABC)). Trong mp(CDJ), đường trung trực của CD cắt Δ_1 tại điểm O thì $OA = OB = OC = OD = R$ (h.91c).



Hình 91c

Ta có $IJ = a$, $CJ = a\sqrt{3}$. Kẻ $OH \perp IJ$ thì

$OH = IK = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. Xét các tam giác ICJ và HJO, ta có $\sin C = \sin J$ hay

$$\frac{IJ}{JC} = \frac{OH}{JO}. \text{ Vậy } JO = \frac{OH.JC}{IJ} = \frac{\frac{3a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{3}}{a} = \frac{3a\sqrt{6}}{2}.$$

Từ đó $OC^2 = CJ^2 + JO^2 = 3a^2 + \dfrac{54a^2}{4} = \dfrac{66a^2}{4}$.

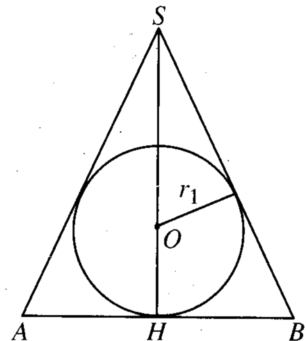
Vậy diện tích mặt cầu phải tìm là $66\pi a^2$.

3) $r = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{a^2\left(3 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}\right)} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3 + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}$.

48. (h.92)

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua trục của hình nón thì (P) cắt hình nón theo tam giác cân SAB, cắt mặt cầu theo đường tròn lớn, đường tròn này nội tiếp tam giác cân. Khi đó, bán kính r_1 của hình cầu nội tiếp hình nón được tính bởi công thức

$$r_1 = \frac{rh}{r + \sqrt{h^2 + r^2}}.$$



Hình 92

1) Thể tích hình nón là $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Thể tích hình cầu nội tiếp hình nón là $V_2 = \dfrac{4\pi}{3}\left(\dfrac{rh}{r + \sqrt{r^2 + h^2}}\right)^3$.

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{\left(r + \sqrt{r^2 + h^2}\right)^3}{rh^2}$.

2) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}}+1\right)^3}{\frac{h^2}{r^2}} = \frac{1}{4}\frac{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^3}{x}$, ở đó $\frac{h^2}{r^2} = x > 0$.

Xét $f(x) = \frac{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^3}{4x}$, $f'(x) = \frac{\left(\sqrt{1+x}+1\right)^2\left(x-2-2\sqrt{1+x}\right)}{4.2x^2\sqrt{x+1}}$.

Vì $\frac{\left(\sqrt{1+x}+1\right)^2}{4.2x^2\sqrt{x+1}} > 0$ nên khi xét dấu của $f'(x)$, ta chỉ cần xét dấu của $g(x) = x - 2 - 2\sqrt{1+x}$. Ta có $g'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Dễ thấy $g'(x) > 0$ vì khi $x > 0$ thì $\frac{1}{\sqrt{x+1}} < 1$, đồng thời $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 8$.

Vậy $g(x)$ là hàm tăng trên miền $x > 0$ và $g(8) = 0$ nên

với $0 < x \leq 8$ thì $g(x) \leq 0$;

với $8 < x < +\infty$ thì $g(x) > 0$.

Bảng biến thiên của $f(x)$

x	0		8		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

Vậy giá trị bé nhất của $\frac{V_1}{V_2}$ bằng 2.

49. (h.93a,b)

1) Ta có $SM = \frac{OM}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\alpha}$

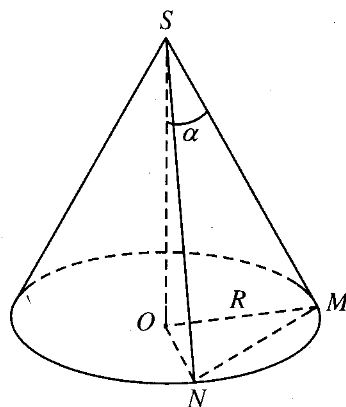
$SO = R\cot\alpha$.

Diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_{xq} = \pi R.\frac{R}{\sin\alpha} = \frac{\pi R^2}{\sin\alpha}.$$

Thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2.R\cot\alpha = \frac{1}{3}\pi R^3\cot\alpha.$$



Hình 93a

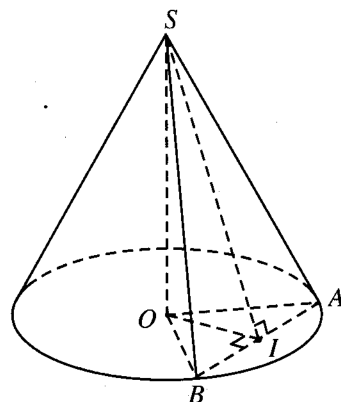
2) Giả sử (P) cắt hình nón theo thiết diện SMN và $SM \perp SN$, khi đó diện tích thiết diện là

$$S_1 = \frac{1}{2}SM.SN = \frac{R^2}{2\sin^2\alpha}.$$

3) Với I là trung điểm của AB thì $\widehat{SIO} = \beta$,

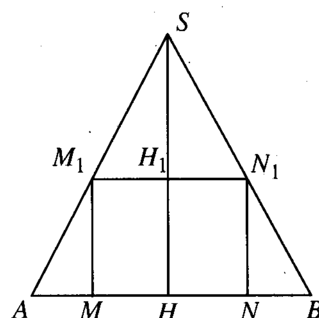
$OI = SO\cot\beta = R.\cot\alpha.\cot\beta$. Vậy điểm I thuộc đường tròn tâm O bán kính $R\cot\alpha.\cot\beta$ trong mặt phẳng chứa đáy hình nón.

Vì SI quay quanh S và dựa vào đường tròn tâm O, bán kính $R\cot\alpha.\cot\beta$ trong mặt phẳng chứa đáy hình nón đã cho nên SI thuộc một hình nón cố định với đường cao SO, đường tròn đáy của hình nón này là đường tròn nêu trên.



Hình 93b

50. (h.94) Xét mặt phẳng qua trục hình nón cắt hình nón và hình trụ nội tiếp hình nón, ta được tam giác cân SAB và hình chữ nhật MNN_1M_1 nội tiếp SAB. Ở đó $AB = 2r$, $SH = 3r$, MN bằng đường kính của đáy hình trụ, NN_1 bằng chiều cao của hình trụ.



Hình 94

Kí hiệu r_1 là bán kính đáy hình trụ, h_1 là chiều cao hình trụ, ta có $0 < r_1 < r$, $0 < h_1 < h$ và

$\frac{r_1}{r} = \frac{SH_1}{SH} = \frac{SH - h_1}{SH} = \frac{3r - h_1}{3r}$, từ đó $h_1 = 3(r - r_1)$. Khi đó

1) Thể tích hình trụ là

$$V = 3\pi r_1^2(r - r_1) = \frac{3\pi}{2}r_1.r_1(2r - 2r_1).$$

Từ đó, V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $r_1 = \frac{2r}{3}$.

2) Diện tích xung quanh của hình trụ là

$$S = 2\pi r_1.h_1 = 3.2\pi r_1(r - r_1) = 6\pi r_1(r - r_1).$$

Từ đó S đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $r_1 = \frac{r}{2}$.

Bài tập trắc nghiệm

1. (B) ,	**2.** (C) ,	**3.** (D) ,	**4.** (D) ,	**5.** (D) ,	**6.** (A) ,
7. (C) ,	**8.** (D) ,	**9.** (C) ,	**10.** (B) ,	**11.** (A) ,	**12.** (C) ,
13. (B) ,	**14.** (D) ,	**15.** (B) ,	**16.** (A) ,	**17.** (D) ,	**18.** (C) ,
19. (B) ,	**20.** (D) ,	**21.** (B) ,	**22.** (A) ,	**23.** (B) ,	**24.** (C) ,
25. (D) ,	**26.** (A) ,	**27.** (B) ,	**28.** (A) ,	**29.** (A) ,	**30.** (A).

Chương III # PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ ĐỀ BÀI

§1. Hệ toạ độ trong không gian

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Hệ toạ độ trong không gian*

Hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc được gọi là hệ trục toạ độ vuông góc trong không gian.

Nếu ta lấy ba vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt nằm trên Ox, Oy, Oz thì :

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, \quad \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0.$$

2. *Toạ độ của vectơ và của điểm*

$$\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$M = (x ; y ; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Nếu $A = (x_A ; y_A ; z_A)$, $B = (x_B ; y_B ; z_B)$ thì $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$.

3. *Vectơ bằng nhau. Toạ độ của vectơ tổng, vectơ hiệu*

Cho $\vec{u}(x_1 ; y_1 ; z_1)$, $\vec{v}(x_2 ; y_2 ; z_2)$. Khi đó

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2.$$

$$\vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2 ; y_1 \pm y_2 ; z_1 \pm z_2)$$

$$k\vec{u} = (kx_1 ; ky_1 ; kz_1),\ k \in \mathbb{R}$$

$$m\vec{u} + n\vec{v} = (mx_1 + nx_2 ; my_1 + ny_2 ; mz_1 + nz_2),\ m, n \in \mathbb{R}.$$

4. *Hai vectơ cùng phương*

Hai vectơ $\vec{u}(x_1;y_1;z_1)$ và $\vec{v}(x_2;y_2;z_2)$ cùng phương ($\vec{u} \neq \vec{0}$)

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{v} = k\vec{u}$, tức là

$$\begin{cases} x_2 = kx_1 \\ y_2 = ky_1 \\ z_2 = kz_1 \end{cases} \text{ hay } \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

5. *Tích vô hướng của hai vectơ*

Cho hai vectơ $\vec{u}(x_1 ; y_1 ; z_1)$, $\vec{v}(x_2 ; y_2 ; z_2)$. Khi đó :

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \text{ với } \vec{u} \neq \vec{0},\ \vec{v} \neq \vec{0}$$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

6. *Tích có hướng của hai vectơ*

Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{u}(x_1 ; y_1 ; z_1)$, $\vec{v}(x_2 ; y_2 ; z_2)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu là $[\vec{u},\vec{v}]$, được xác định bởi

$$[\vec{u},\vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Tính chất :

$$[\vec{u},\vec{v}] \perp \vec{u},\ [\vec{u},\vec{v}] \perp \vec{v}$$

$$|[\vec{u},\vec{v}]| = |\vec{u}|.|\vec{v}|\sin(\vec{u},\vec{v})$$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{u},\vec{v}] = \vec{0}$

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{u},\vec{v}].\vec{w} = 0.$

7. *Các ứng dụng của tích có hướng*

Diện tích tam giác : $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$

Thể tích khối hộp : $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$

Thể tích tứ diện : $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

8. *Mặt cầu*

Mặt cầu tâm $I(a\ ;\ b\ ;\ c)$, bán kính R có phương trình

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Ngược lại, phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 \qquad (*)$$

là phương trình của một mặt cầu nếu có điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 > d$.

Khi đó $I(-a\ ;\ -b\ ;\ -c)$ là tâm của mặt cầu và $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ là bán kính của mặt cầu.

Nếu $a^2 + b^2 + c^2 = d$, phương trình (*) xác định một điểm duy nhất

$$I(-a\ ;\ -b\ ;\ -c).$$

Nếu $a^2 + b^2 + c^2 < d$, không có điểm nào thoả mãn phương trình (*).

Chú ý. Trong cuốn sách này, khi nói đến các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ mà không nói gì thêm, ta hiểu đó lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz trong hệ trục toạ độ $Oxyz$.

II – ĐỀ BÀI

1. Cho ba vectơ $\vec{u}(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$, $\vec{v}(2\ ;\ 2\ ;\ -1)$, $\vec{w}(4\ ;\ 0\ ;\ -4)$. Tìm toạ độ của vectơ $\vec{x}$, biết :

a) $\vec{x} = \vec{u} - \vec{v}$;

b) $\vec{x} = \vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$;

c) $\vec{x} = 2\vec{u} + 4\vec{v} - \vec{w}$;

d) $\vec{x} = 5\vec{u} - 3\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$;

e) $2\vec{x} - 3\vec{u} = \vec{w}$;

g) $2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} + 3\vec{x} = \vec{0}$;

2. Cho $\vec{u} = (3 ; 2 ; -5)$. Trong các vectơ sau đây, vectơ nào cùng phương với $\vec{u}$?

$\vec{a} = (-6 ; -4 ; 10)$, $\vec{b} = \left(2; \frac{4}{3}; -\frac{10}{3}\right)$,

$\vec{c} = (6 ; 4 ; 10)$, $\vec{d} = (1 ; -4 ; 2)$.

3. Cho vectơ $\vec{u}$ có điểm đầu là $(1 ; -1 ; 3)$ và điểm cuối là $(-2 ; 3 ; 5)$.

Trong các vectơ sau đây, vectơ nào cùng phương với $\vec{u}$?

$\vec{a} = -6\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$.

4. a) Cho $\vec{u} = (3 ; -5 ; 6)$, biết toạ độ điểm đầu của $\vec{u}$ là $(0 ; 6 ; 2)$. Tìm toạ độ điểm cuối của $\vec{u}$.

b) Cho $\vec{v} = (1 ; 1 ; 1)$, biết toạ độ điểm cuối của $\vec{v}$ là $(2 ; 1 ; 4)$. Tìm toạ độ điểm đầu của $\vec{v}$.

5. Bộ ba điểm A, B, C nào sau đây thẳng hàng ?

a) $A = (1 ; 3 ; 1)$, $B = (0 ; 1 ; 2)$, $C = (0 ; 0 ; 1)$;

b) $A = (1 ; 1 ; 1)$, $B = (-4 ; 3 ; 1)$, $C = (-9 ; 5 ; 1)$;

c) $A = (0 ; -2 ; 5)$, $B = (3 ; 4 ; 4)$, $C = (2 ; 2 ; 1)$;

d) $A = (1 ; -1 ; 5)$, $B = (0 ; -1 ; 6)$, $C = (3 ; -1 ; 5)$;

e) $A = (1 ; 2 ; 4)$, $B = (2 ; 5 ; 0)$, $C = (0 ; 1 ; 5)$.

6. a) Cho ba điểm $A(2 ; 5 ; 3)$, $B(3 ; 7 ; 4)$, $C(x ; y ; 6)$.

Tìm x, y để A, B, C thẳng hàng.

b) Cho hai điểm $A(-1 ; 6 ; 6)$, $B(3 ; -6 ; -2)$.

Tìm điểm M thuộc mp(Oxy) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.

7. Chứng minh bốn điểm $A(1 ; -1 ; 1)$, $B(1 ; 3 ; 1)$, $C(4 ; 3 ; 1)$, $D(4 ; -1 ; 1)$ là các đỉnh của một hình chữ nhật.

Tính độ dài các đường chéo, xác định toạ độ của tâm hình chữ nhật đó. Tính côsin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

8. a) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(x_1 ; y_1 ; z_1)$, $C(x_3 ; y_3 ; z_3)$, $B'(x'_2 ; y'_2 ; z'_2)$, $D'(x'_4 ; y'_4 ; z'_4)$. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại.

b) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(1 ; 0 ; 1)$, $B(2 ; 1 ; 2)$, $D(1 ; -1 ; 1)$, $C'(4 ; 5 ; -5)$. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại.

9. Tính tích có hướng $[\vec{u}, \vec{v}]$, biết

a) $\vec{u} = (1 ; 2 ; -3)$, $\vec{v} = (-4 ; 1 ; 2)$;

b) $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$;

c) $\vec{u} = (0 ; 1 ; -2)$, $\vec{v} = (3 ; 0 ; -4)$;

d) $\vec{u} = 4\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$;

10. Tính $[\vec{u}, \vec{v}].\vec{w}$ biết

a) $\vec{u} = (0 ; 3 ; 2)$; $\vec{v} = (-4 ; 1 ; -3)$; $\vec{w} = (1 ; -2 ; 2)$;

b) $\vec{u} = 4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{v} = \vec{j} + 5\vec{k}$; $\vec{w} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$;

c) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$; $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{w} = \vec{i}$.

11. Chứng tỏ bốn điểm sau đây là bốn đỉnh của một hình bình hành và tính diện tích của hình bình hành đó : (1 ; 1 ; 1), (2 ; 3 ; 4), (6 ; 5 ; 2), (7 ; 7 ; 5).

12. Chứng tỏ tám điểm sau đây là tám đỉnh của một hình hộp và tính thể tích của hình hộp đó : (0 ; 0 ; 0), (3 ; 0 ; 0), (0 ; 5 ; 1), (3 ; 5 ; 1), (2 ; 0 ; 5), (5 ; 0 ; 5), (2 ; 5 ; 6), (5 ; 5 ; 6).

13. a) Tìm trên trục Oy điểm cách đều hai điểm $A(3 ; 1 ; 0)$, $B(-2 ; 4 ; 1)$.

b) Tìm trên mặt phẳng (Oxz) điểm cách đều ba điểm

$$A(1 ; 1 ; 1), B(-1 ; 1 ; 0), C(3 ; 1 ; -1).$$

14. Cho hai điểm $A(2 ; -1 ; 7)$, $B(4 ; 5 ; -2)$. Đường thẳng AB cắt mp(Oyz) tại điểm M. Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số nào ? Tìm toạ độ điểm M.

15. Xét sự đồng phẳng của ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $\vec{u}(1 ; -1 ; 1)$, $\vec{v}(0 ; 1 ; 2)$, $\vec{w}(4 ; 2 ; 3)$;

b) $\vec{u}(4 ; 3 ; 4)$, $\vec{v}(2 ; -1 ; 2)$, $\vec{w}(1 ; 2 ; 1)$;

c) $\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{k}$;

d) $\vec{u}(-3 ; 1 ; -2)$, $\vec{v}(1 ; 1 ; 1)$, $\vec{w}(-2 ; 2 ; 1)$;

16. a) Cho $\vec{u}(2 ; -1 ; 1)$, $\vec{v}(m ; 3 ; -1)$, $\vec{w}(1 ; 2 ; 1)$.

Tìm m để ba vectơ đồng phẳng.

b) Cho $\vec{u}(1 ; 2 ; 3)$, $\vec{v}(2 ; 1 ; m)$, $\vec{w}(2 ; m ; 1)$.

Tìm m để ba vectơ trên không đồng phẳng.

c) Cho $\vec{u}(1 ; 1 ; 2)$, $\vec{v}(-1 ; 3 ; 1)$. Tìm vectơ đơn vị đồng phẳng với $\vec{u}$, $\vec{v}$ và tạo với $\vec{u}$ góc 45°.

17. Cho ba vectơ $\vec{u}(3 ; 7 ; 0)$, $\vec{v}(2 ; 3 ; 1)$, $\vec{w}(3 ; -2 ; 4)$.

a) Chứng minh $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ không đồng phẳng.

b) Biểu thị vectơ $\vec{a}(-4 ; -12 ; 3)$ theo ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

18. Trong không gian cho ba tia Ox, Oy, Oz. Chứng minh rằng nếu tia Ox vuông góc với tia phân giác của góc $\widehat{yOz}$ thì $\widehat{xOy} + \widehat{xOz} = 180^{\circ}$.

19. a) Cho hai vectơ $\vec{a}(1 ; m ; -1)$ và $\vec{b}(2 ; 1 ; 3)$. Tìm m để $\vec{a} \perp \vec{b}$.

b) Cho hai vectơ $\vec{a}(1 ; \log_3 5 ; m)$ và $\vec{b}(3 ; \log_5 3 ; 4)$. Tìm m để $\vec{a} \perp \vec{b}$.

c) Cho hai vectơ $\vec{a}\,(2; \sqrt{3}; 1)$ và $\vec{b}(\sin 5t ; \cos 3t ; \sin 3t)$. Tìm t để $\vec{a} \perp \vec{b}$.

d) Cho vectơ $\vec{a}(2\sqrt{2} ; -1 ; 4)$. Tìm vectơ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$, biết rằng $|\vec{b}| = 10$.

e) Cho $\vec{a} = (2 ; -1 ; 0)$. Tìm vectơ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$, biết rằng $\vec{a}.\vec{b} = 10$.

20. a) Tìm vectơ đơn vị vuông góc với trục Ox và vuông góc với vectơ $\vec{a}(3 ; 6 ; 8)$.

b) Cho vectơ $\vec{a}(1 ; -2 ; 3)$. Tìm toạ độ vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$ biết $\vec{b}$ tạo với trục Oy một góc nhọn và $|\vec{b}| = \sqrt{14}$.

c) Vectơ $\vec{u}$ có độ dài bằng 2, tạo với vectơ $\vec{a}(1 ; 1 ; 1)$ góc 30°, tạo với vectơ $\vec{b}(1 ; 1 ; 0)$ góc 45°. Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u}$.

d) Vectơ $\vec{u}$ vuông góc với hai vectơ $\vec{a}(1 ; 1 ; 1)$ và $\vec{b}(1 ; -1 ; 3)$, $\vec{u}$ tạo với trục Oz một góc tù và $|\vec{u}| = 3$. Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u}$.

21. Trong không gian $Oxyz$ cho bốn điểm $A(1 ; 1 ; 0)$, $B(0 ; 2 ; 1)$, $C(1 ; 0 ; 2)$, $D(1 ; 1 ; 1)$.

a) Chứng minh bốn điểm đó không đồng phẳng. Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

8. a) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(x_1 ; y_1 ; z_1)$, $C(x_3 ; y_3 ; z_3)$, $B'(x'_2 ; y'_2 ; z'_2)$, $D'(x'_4 ; y'_4 ; z'_4)$. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại.

b) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(1 ; 0 ; 1)$, $B(2 ; 1 ; 2)$, $D(1 ; -1 ; 1)$, $C'(4 ; 5 ; -5)$. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại.

9. Tính tích có hướng $[\vec{u}, \vec{v}]$, biết

a) $\vec{u} = (1 ; 2 ; -3)$, $\vec{v} = (-4 ; 1 ; 2)$;

b) $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$;

c) $\vec{u} = (0 ; 1 ; -2)$, $\vec{v} = (3 ; 0 ; -4)$;

d) $\vec{u} = 4\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$;

10. Tính $[\vec{u}, \vec{v}].\vec{w}$ biết

a) $\vec{u} = (0 ; 3 ; 2)$; $\vec{v} = (-4 ; 1 ; -3)$; $\vec{w} = (1 ; -2 ; 2)$;

b) $\vec{u} = 4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{v} = \vec{j} + 5\vec{k}$; $\vec{w} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$;

c) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$; $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{w} = \vec{i}$.

11. Chứng tỏ bốn điểm sau đây là bốn đỉnh của một hình bình hành và tính diện tích của hình bình hành đó : $(1 ; 1 ; 1)$, $(2 ; 3 ; 4)$, $(6 ; 5 ; 2)$, $(7 ; 7 ; 5)$.

12. Chứng tỏ tám điểm sau đây là tám đỉnh của một hình hộp và tính thể tích của hình hộp đó : $(0 ; 0 ; 0)$, $(3 ; 0 ; 0)$, $(0 ; 5 ; 1)$, $(3 ; 5 ; 1)$, $(2 ; 0 ; 5)$, $(5 ; 0 ; 5)$, $(2 ; 5 ; 6)$, $(5 ; 5 ; 6)$.

13. a) Tìm trên trục Oy điểm cách đều hai điểm $A(3 ; 1 ; 0)$, $B(-2 ; 4 ; 1)$.

b) Tìm trên mặt phẳng (Oxz) điểm cách đều ba điểm

$$A(1 ; 1 ; 1), B(-1 ; 1 ; 0), C(3 ; 1 ; -1).$$

14. Cho hai điểm $A(2 ; -1 ; 7)$, $B(4 ; 5 ; -2)$. Đường thẳng AB cắt mp(Oyz) tại điểm M. Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số nào ? Tìm toạ độ điểm M.

15. Xét sự đồng phẳng của ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $\vec{u}(1 ; -1 ; 1)$, $\vec{v}(0 ; 1 ; 2)$, $\vec{w}(4 ; 2 ; 3)$;

b) $\vec{u}(4 ; 3 ; 4)$, $\vec{v}(2 ; -1 ; 2)$, $\vec{w}(1 ; 2 ; 1)$;

c) $\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{k}$;

d) $\vec{u}(-3 ; 1 ; -2)$, $\vec{v}(1 ; 1 ; 1)$, $\vec{w}(-2 ; 2 ; 1)$;

16. a) Cho $\vec{u}(2 ; -1 ; 1)$, $\vec{v}(m ; 3 ; -1)$, $\vec{w}(1 ; 2 ; 1)$.

Tìm m để ba vectơ đồng phẳng.

b) Cho $\vec{u}(1 ; 2 ; 3)$, $\vec{v}(2 ; 1 ; m)$, $\vec{w}(2 ; m ; 1)$.

Tìm m để ba vectơ trên không đồng phẳng.

c) Cho $\vec{u}(1 ; 1 ; 2)$, $\vec{v}(-1 ; 3 ; 1)$. Tìm vectơ đơn vị đồng phẳng với $\vec{u}$, $\vec{v}$ và tạo với $\vec{u}$ góc 45°.

17. Cho ba vectơ $\vec{u}(3 ; 7 ; 0)$, $\vec{v}(2 ; 3 ; 1)$, $\vec{w}(3 ; -2 ; 4)$.

a) Chứng minh $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ không đồng phẳng.

b) Biểu thị vectơ $\vec{a}(-4 ; -12 ; 3)$ theo ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

18. Trong không gian cho ba tia Ox, Oy, Oz. Chứng minh rằng nếu tia Ox vuông góc với tia phân giác của góc $\widehat{yOz}$ thì $\widehat{xOy} + \widehat{xOz} = 180^{\circ}$.

19. a) Cho hai vectơ $\vec{a}(1 ; m ; -1)$ và $\vec{b}(2 ; 1 ; 3)$. Tìm m để $\vec{a} \perp \vec{b}$.

b) Cho hai vectơ $\vec{a}(1 ; \log_3 5 ; m)$ và $\vec{b}(3 ; \log_5 3 ; 4)$. Tìm m để $\vec{a} \perp \vec{b}$.

c) Cho hai vectơ $\vec{a}(2; \sqrt{3}; 1)$ và $\vec{b}(\sin 5t ; \cos 3t ; \sin 3t)$. Tìm t để $\vec{a} \perp \vec{b}$.

d) Cho vectơ $\vec{a}(2\sqrt{2} ; -1 ; 4)$. Tìm vectơ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$, biết rằng $|\vec{b}| = 10$.

e) Cho $\vec{a} = (2 ; -1 ; 0)$. Tìm vectơ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$, biết rằng $\vec{a}.\vec{b} = 10$.

20. a) Tìm vectơ đơn vị vuông góc với trục Ox và vuông góc với vectơ $\vec{a}(3 ; 6 ; 8)$.

b) Cho vectơ $\vec{a}(1 ; -2 ; 3)$. Tìm toạ độ vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$ biết $\vec{b}$ tạo với trục Oy một góc nhọn và $|\vec{b}| = \sqrt{14}$.

c) Vectơ $\vec{u}$ có độ dài bằng 2, tạo với vectơ $\vec{a}(1 ; 1 ; 1)$ góc 30°, tạo với vectơ $\vec{b}(1 ; 1 ; 0)$ góc 45°. Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u}$.

d) Vectơ $\vec{u}$ vuông góc với hai vectơ $\vec{a}(1 ; 1 ; 1)$ và $\vec{b}(1 ; -1 ; 3)$, $\vec{u}$ tạo với trục Oz một góc tù và $|\vec{u}| = 3$. Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u}$.

21. Trong không gian $Oxyz$ cho bốn điểm $A(1 ; 1 ; 0)$, $B(0 ; 2 ; 1)$, $C(1 ; 0 ; 2)$, $D(1 ; 1 ; 1)$.

a) Chứng minh bốn điểm đó không đồng phẳng. Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

b) Tìm toạ độ trọng tâm của tam giác ABC, trọng tâm của tứ diện $ABCD$.

c) Tính diện tích các mặt của tứ diện $ABCD$.

d) Tính độ dài các đường cao của tứ diện $ABCD$.

e) Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

g) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

22. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 0 ; 1)$ và $C(2 ; 1 ; 1)$.

a) Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tính chu vi, diện tích tam giác ABC.

c) Tìm toạ độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.

d) Tính độ dài đường cao h_A của tam giác ABC kẻ từ A.

e) Tính các góc của tam giác ABC.

g) Xác định toạ độ trực tâm tam giác ABC.

h) Xác định toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

23. Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có

$$A = (1 ; 2 ; -1), B = (2 ; -1 ; 3), C = (-4 ; 7 ; 5).$$

a) Tính độ dài đường cao h_A của tam giác kẻ từ đỉnh A.

b) Tính độ dài đường phân giác trong của tam giác kẻ từ đỉnh B.

24. Chứng minh các tính chất sau đây của tích có hướng :

a) $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a}\right]$;

b) $\left[\vec{a},\vec{a}\right] = \vec{0}$;

c) $\left[k\vec{a},\vec{b}\right] = k\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left[\vec{a},k\vec{b}\right]$;

d) $\left[\vec{c},\vec{a}+\vec{b}\right] = \left[\vec{c},\vec{a}\right] + \left[\vec{c},\vec{b}\right]$;

e) $\vec{a}.\left[\vec{b},\vec{c}\right] = \left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}$;

g) $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|^2 = |\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2 - \left(\vec{a}.\vec{b}\right)^2$.

25. Cho tứ diện $ABCD$ có $A(2 ; 1 ; -1)$, $B(3 ; 0 ; 1)$, $C(2 ; -1 ; 3)$ và D thuộc trục Oy. Biết $V_{ABCD} = 5$. Tìm toạ độ đỉnh D.

26. Cho bốn điểm $A(2 ; -1 ; 6)$, $B(-3 ; -1 ; -4)$, $C(5 ; -1 ; 0)$, $D(1 ; 2 ; 1)$.

a) Chứng minh ABC là tam giác vuông. Tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác.

b) Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

c) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

27. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

a) Chứng minh $A'C \perp (AB'D')$.

b) Gọi M là trung điểm của AD, N là trung điểm của BB'. Chứng minh $A'C \perp MN$.

c) Tính côsin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AC'}$.

d) Tính $V_{A'CMN}$.

28. Cho tứ diện $SABC$ có $SC = CA = AB = a\sqrt{2}$, $SC \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A. Các điểm $M \in SA$, $N \in BC$ sao cho $AM = CN = t$ $(0 < t < 2a)$.

a) Tính độ dài đoạn MN. Tìm giá trị t để MN ngắn nhất.

b) Khi đoạn MN ngắn nhất, chứng minh MN là đường vuông góc chung của BC và SA.

29. Viết phương trình mặt cầu :

a) Có tâm $I(1 ; 0 ; -1)$, đường kính bằng 8.

b) Có đường kính AB với $A = (-1 ; 2 ; 1)$, $B = (0 ; 2 ; 3)$.

c) Có tâm $O(0 ; 0 ; 0)$ và tiếp xúc với mặt cầu (S) có tâm $(3 ; -2 ; 4)$, bán kính bằng 1.

d) Có tâm $I(3 ; -2 ; 4)$ và đi qua $A(7 ; 2 ; 1)$.

e) Có tâm $I(2 ; -1 ; 3)$ và tiếp xúc với mp(Oxy).

g) Có tâm $I(2 ; -1 ; 3)$ và tiếp xúc với mp(Oxz).

h) Có tâm $I(2 ; -1 ; 3)$ và tiếp xúc với mp(Oyz).

30. Trong các phương trình sau đây, phương trình nào là phương trình của một mặt cầu ? Nếu là phương trình mặt cầu, hãy tìm tâm và tính bán kính của nó.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 8z + 1 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 4y + 2z + 30 = 0$;

c) $x^2 + y^2 + z^2 - y = 0$;

d) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 3y + 5z - 2 = 0$;

e) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 4y - 8z + 25 = 0$.

31. a) Viết phương trình mặt cầu đi qua $A(1 ; 2 ; -4)$, $B(1 ; -3 ; 1)$, $C(2 ; 2 ; 3)$ và có tâm nằm trên mp(Oxy).

b) Viết phương trình mặt cầu đi qua hai điểm $A(3 ; -1 ; 2)$, $B(1 ; 1 ; -2)$ và có tâm thuộc trục Oz.

c) Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm $A(1 ; 1 ; 1)$, $B(1 ; 2 ; 1)$, $C(1 ; 1 ; 2)$, $D(2 ; 2 ; 1)$.

32. Cho sáu điểm $A(a ; 0 ; 0)$, $B(0 ; b ; 0)$, $C(0 ; 0 ; c)$, $A'(a' ; 0 ; 0)$, $B'(0, b', 0)$, $C'(0 ; 0, c')$ với $aa' = bb' = cc' \neq 0$; $a \neq a'$, $b \neq b'$, $c \neq c'$.

a) Chứng minh có một mặt cầu đi qua sáu điểm nói trên.

b) Chứng minh đường thẳng đi qua gốc toạ độ O và trọng tâm tam giác ABC vuông góc với mặt phẳng $(A'B'C')$.

33. a) Tìm tập hợp tâm các mặt cầu đi qua điểm $A(a ; b ; c)$ cho trước và có bán kính R không đổi.

b) Cho bốn điểm $A(2 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 4 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 6)$, $D(2 ; 4 ; 6)$. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho

$$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4.$$

c) Cho ba điểm $A(a ; 0 ; 0)$, $B(0 ; b ; 0)$, $C(0 ; 0, c)$. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 = MO^2$ (O là gốc toạ độ).

34. a) Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4mx + 4y + 2mz + m^2 + 4m = 0$.

Xác định m để nó là phương trình của một mặt cầu. Khi đó, tìm m để bán kính mặt cầu là nhỏ nhất.

b) Cho phương trình :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x\cos\alpha - 2y\sin\alpha - 4z - (4 + \sin^2\alpha) = 0.$$

Xác định α để phương trình trên là phương trình của một mặt cầu. Khi đó, tìm α để bán kính mặt cầu là nhỏ nhất, lớn nhất.

§2. Phương trình mặt phẳng

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng*

* Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của mp(α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (α), viết tắt là $\vec{n} \perp (\alpha)$.

* Nếu hai vectơ $\vec{u}\,(x_1\,;\,y_1\,;\,z_1)$, $\vec{v}\,(x_2\,;\,y_2\,;\,z_2)$ không cùng phương và giá của chúng song song với một mp(α) (hoặc nằm trên (α)) thì vectơ

$$\vec{n} = [\vec{u},\vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

là một vectơ pháp tuyến của mp(α).

2. Mặt phẳng đi qua điểm $M_o(x_o\,;\,y_o\,;\,z_o)$ với vectơ pháp tuyến $\vec{n}\,(A\,;\,B\,;\,C)$ có phương trình tổng quát là

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0.$$

3. Mỗi mặt phẳng đều có phương trình tổng quát dạng

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Ngược lại, mỗi phương trình có dạng trên đều là phương trình của một mặt phẳng.

Nếu mp(α) có phương trình (1) thì vectơ $\vec{n}\,(A\,;\,B\,;\,C)$ là vectơ pháp tuyến của mp(α).

4. *Các trường hợp đặc biệt*

Xét mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó

- $D = 0 \Leftrightarrow (\alpha)$ đi qua gốc toạ độ.
- $C = 0, D \neq 0 \Leftrightarrow (\alpha)$ song song với trục Oz.
  $C = D = 0 \Leftrightarrow (\alpha)$ chứa trục Oz.
- $B = C = 0, D \neq 0 \Leftrightarrow (\alpha)$ song song với mp(Oyz).
  $B = C = D = 0 \Leftrightarrow (\alpha)$ chính là mp(Oyz).

(Các trường hợp khác suy ra tương tự).

5. *Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng*

Cho hai mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\alpha'): A'x + B'y + C'z + D' = 0$.

$$(\alpha) \equiv (\alpha') \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

$$(\alpha) // (\alpha') \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$

$$(\alpha) \text{ cắt } (\alpha') \Leftrightarrow A : B : C \neq A' : B' : C'$$

(Đặc biệt, $(\alpha) \perp (\alpha') \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$).

6. *Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn*

Mặt phẳng (α) không đi qua gốc O, cắt trục Ox tại điểm $(a ; 0 ; 0)$, cắt trục Oy tại điểm $(0 ; b ; 0)$, cắt trục Oz tại điểm $(0 ; 0 ; c)$ có phương trình :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, abc \neq 0.$$

Phương trình này gọi là phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng (α).

7. *Góc giữa hai mặt phẳng*

Cho hai mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$

và $(\alpha') : A'x + B'y + C'z + D' = 0$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (α'), ta có :

$$\cos\varphi = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

8. *Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng*

Cho mp$(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$, khi đó

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

II – ĐỀ BÀI

35. Cho điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ với $x_0y_0z_0 \neq 0$. Trong mỗi trường hợp sau, viết phương trình mặt phẳng :

a) Đi qua điểm M_0 và song song với một trong các mặt phẳng toạ độ : (Oxy), (Oyz), (Oxz).

b) Đi qua các hình chiếu của điểm M_0 trên các trục toạ độ Ox, Oy, Oz.

c) Đi qua điểm M_0 và lần lượt chứa các trục toạ độ Ox, Oy, Oz.

36. Trong mỗi trường hợp sau, viết phương trình mặt phẳng :

a) Đi qua ba điểm $A(-1 ; 2 ; 3)$, $B(2 ; -4 ; 3)$, $C(4 ; 5 ; 6)$.

b) Đi qua điểm $M_0(1 ; 3 ; -2)$ và vuông góc với trục Oy.

c) Đi qua điểm $M_0(1 ; 3 ; -2)$ và vuông góc với đường thẳng BC với $B = (0 ; 2 ; -3)$, $C = (1 ; -4 ; 1)$.

d) Đi qua điểm $M_0(1 ; 3 ; -2)$ và song song với mặt phẳng

$$2x - y + 3z + 4 = 0.$$

e) Đi qua hai điểm $A(3 ; 1 ; -1)$, $B(2 ; -1 ; 4)$ và vuông góc với mặt phẳng

$$2x - y + 3z + 4 = 0.$$

g) Đi qua điểm $M_0(2 ; -1 ; 2)$, song song với trục Oy và vuông góc với mặt phẳng $2x - y + 3z + 4 = 0$.

h) Đi qua điểm $M_0(-2 ; 3 ; 1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng

$$(\alpha) : 2x + y + 2z + 5 = 0 \text{ và } (\alpha') : 3x + 2y + z - 3 = 0.$$

37. a) Bốn điểm $A(-1 ; 2 ; 3)$, $B(2 ; -4 ; 3)$, $C(4 ; 5 ; 6)$, $D(3 ; 2 ; 1)$ có thuộc cùng một mặt phẳng không ?

b) Tìm a để bốn điểm $A(1 ; 2 ; 1)$, $B(2 ; a ; 0)$, $C(4 ; -2 ; 5)$, $D(6 ; 6 ; 6)$ thuộc cùng một mặt phẳng.

c) Cho ba điểm $A(1 ; 1 ; 1)$, $B(3 ; -1 ; 1)$, $C(-1 ; 0 ; 2)$. Điểm C có thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB không ?

38. Cho hai điểm $A(0 ; 0 ; -3)$, $B(2 ; 0 ; -1)$ và mặt phẳng

$$(P) : 3x - 8y + 7z - 1 = 0.$$

a) Tìm toạ độ giao điểm I của đường thẳng AB với mặt phẳng (P).

b) Tìm toạ độ điểm C nằm trên mp(P) sao cho ABC là tam giác đều.

39. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(1 ; 2 ; 4)$, cắt các trục toạ độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC \neq 0$.

40. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(1 ; 1 ; 1)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho thể tích của tứ diện $OABC$ có giá trị nhỏ nhất.

41. Xét vị trí tương đối của mỗi cặp mặt phẳng cho bởi các phương trình sau :

a) $x - y + 2z - 4 = 0$ và $10x - 10y + 20z - 40 = 0$;

b) $3x - 2y - 3z + 5 = 0$ và $9x - 6y - 9z - 5 = 0$;

c) $x + y + z - 1 = 0$ và $2x + 2y - 2z + 3 = 0$;

d) $x - 2y + z + 3 = 0$ và $2x - y + 4z - 2 = 0$;

e) $x + 2y - z + 5 = 0$ và $2x + 3y - 7z - 4 = 0$.

42. a) Tìm α để hai mặt phẳng

$$x - \frac{1}{4}y - z + 5 = 0 \text{ và } x\sin\alpha + y\cos\alpha + z\sin^3\alpha + 2 = 0$$

vuông góc với nhau.

b) Tìm α để vectơ $\vec{u}(\sin\alpha ; 0 ; \sin\alpha \cos2\alpha)$ có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng $(P) : x + y + 2z + 6 = 0$.

c) Cho hai mặt phẳng có phương trình :

$$2x - my + 3z - 6 + m = 0 \text{ và } (m + 3)x - 2y + (5m + 1)z - 10 = 0.$$

Với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng đó :

– Song song với nhau ;

– Trùng nhau ;

– Cắt nhau ;

– Vuông góc với nhau ?

43. Viết phương trình mặt phẳng trong mỗi trường hợp sau :

a) Đi qua điểm $M_0(2 ; 1 ; -1)$ và qua giao tuyến của hai mặt phẳng

$$x - y + z - 4 = 0 \text{ và } 3x - y + z - 1 = 0.$$

b) Qua giao tuyến của hai mặt phẳng $y + 2z - 4 = 0$ và $x + y - z + 3 = 0$, đồng thời song song với mặt phẳng $x + y + z - 2 = 0$.

c) Qua giao tuyến của hai mặt phẳng $3x - y + z - 2 = 0$ và $x + 4y - 5 = 0$, đồng thời vuông góc với mặt phẳng $2x - z + 7 = 0$.

44. Xác định các giá trị k và m để ba mặt phẳng sau đây cùng đi qua một đường thẳng :

$$5x + ky + 4z + m = 0$$

$$3x - 7y + z - 3 = 0$$

$$x - 9y - 2z + 5 = 0.$$

45. Cho ba mặt phẳng $(P) : x + y + z - 6 = 0$

$$(Q) : mx - 2y + z + m - 1 = 0$$

$$(R) : mx + (m - 1)y - z + 2m = 0.$$

Xác định giá trị m để ba mặt phẳng đó đôi một vuông góc với nhau, tìm giao điểm chung của cả ba mặt phẳng.

46. a) Cho mặt cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 4z + 5 = 0$ và điểm $M_0(4 ; 3 ; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M_0.

b) Viết phương trình mặt cầu có tâm $I(-2 ; 1 ; 1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (α) có phương trình $x + 2y - 2z + 5 = 0$.

c) Cho bốn điểm $A(3 ; -2 ; -2)$, $B(3 ; 2 ; 0)$, $C(0 ; 2 ; 1)$ và $D(-1 ; 1 ; 2)$. Viết phương trình mặt cầu tâm A, tiếp xúc với mặt phẳng (BCD).

d) Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $A(1 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 1 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 1)$ và có tâm I nằm trên mặt phẳng $x + y + z - 3 = 0$.

47. a) Viết phương trình mp(P) chứa trục Oz và tạo với mp(α) có phương trình $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ một góc 60°.

b) Viết phương trình mp(Q) đi qua $A(3 ; 0 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 1)$ và tạo với mp(Oxy) góc 60°.

48. a) Tìm trên Oy điểm cách đều hai mặt phẳng

$$(\alpha) : x + y - z + 1 = 0 \quad \text{và} \quad (\alpha') : x - y + z - 5 = 0.$$

b) Cho ba điểm $A(a ; 0 ; 0)$, $B(0 ; b ; 0)$, $C(0 ; 0 ; c)$ với a, b, c là những số dương thay đổi sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Xác định a, b, c để khoảng cách từ O tới mp(ABC) lớn nhất.

49. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0 ; 0 ; 0)$, $B(a ; 0 ; 0)$, $D(0 ; a ; 0)$, $A'(0, 0, b)$ với a, b là những số dương và M là trung điểm của CC'.

a) Tính thể tích tứ diện $BDA'M$.

b) Tìm tỉ số $\frac{a}{b}$ để mp$(A'BD)$ vuông góc với mp(MBD).

50. Cho hai mặt phẳng song song có phương trình

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ và } Ax + By + Cz + E = 0.$$

a) Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó.

b) Viết phương trình mặt phẳng song song và cách đều hai mặt phẳng đó.

51. Cho tứ diện $ABCD$ với $A(3 ; 5 ; -1)$, $B(7 ; 5 ; 3)$, $C(9 ; -1 ; 5)$, $D(5 ; 3 ; -3)$. Viết phương trình mặt phẳng cách đều bốn đỉnh của tứ diện đó.

52. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $M_1(x_1 ; y_1 ; z_1)$, $M_2(x_2 ; y_2 ; z_2)$ không nằm trên mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$.

Tìm điều kiện cần và đủ để

a) Đường thẳng M_1M_2 cắt (α) ;

b) Đoạn thẳng M_1M_2 cắt (α) ;

c) Đường thẳng M_1M_2 cắt (α) tại I sao cho M_1 nằm giữa I và M_2 ;

d) Đường thẳng M_1M_2 cắt (α) tại I sao cho M_2 nằm giữa I và M_1.

53. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Gọi I là trung điểm của cạnh bên SC. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABI).

54. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1.

a) Tính góc tạo bởi các đường thẳng AC' và $A'B$.

b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, BC, DD'. Chứng minh AC' vuông góc với mặt phẳng (MNP).

c) Tính thể tích tứ diện $AMNP$.

§3. Phương trình đường thẳng

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Đường thẳng đi qua điểm $M_o(x_o ; y_o ; z_o)$ với vectơ chỉ phương $\vec{u}\,(a ; b ; c)$ có :

+ Phương trình tham số là $\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \\ z = z_o + ct \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

(Mỗi giá trị t cho ta các giá trị tương ứng x, y, z là toạ độ của một điểm M thuộc đường thẳng).

+ Phương trình chính tắc là : $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$

với điều kiện $abc \neq 0$.

2. Cho hai mặt phẳng (α) và (α') lần lượt có phương trình là :

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ và } A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

với điều kiện $A : B : C \neq A' : B' : C'$.

Điều kiện trên chứng tỏ hai mặt phẳng đó cắt nhau. Gọi d là đường thẳng giao tuyến của chúng. Đường thẳng d gồm những điểm $M(x; y; z)$ vừa thuộc mặt phẳng (α) vừa thuộc mặt phẳng (α') nên toạ độ của M là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0. \end{cases}$$

Khi đó, $\vec{u} = [\vec{n}, \vec{n'}]$ với $\vec{n} = (A; B; C)$, $\vec{n'} = (A' ; B' ; C')$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d.

3. Vị trí tương đối giữa đường thẳng d (đi qua M_0 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$) và đường thẳng d' (đi qua M_0' và có vectơ chỉ phương $\vec{u'}$).

+ d và d' cùng nằm trong một mặt phẳng $\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{u'}].\overrightarrow{M_0M_0'} = 0$.

+ $d \equiv d' \Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{u'}] = [\vec{u}, \overrightarrow{M_0M_0'}] = \vec{0}$.

+ $d \,//\, d' \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}, \vec{u'}] = \vec{0} \\ [\vec{u}, \overrightarrow{M_0M_0'}] \neq \vec{0}. \end{cases}$

+ d và d' cắt nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}, \vec{u'}].\overrightarrow{M_0M_0'} = 0 \\ [\vec{u}, \vec{u'}] \neq \vec{0}. \end{cases}$

+ d, d' chéo nhau $\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{u'}].\overrightarrow{M_0M_0'} \neq 0$.

Khi giải bài tập, nếu biết phương trình của hai đường thẳng d, d', ta cũng có thể xét vị trí tương đối giữa chúng bằng cách giải hệ phương trình để tìm giao điểm.

Nếu hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì d, d' cắt nhau.

Nếu hệ phương trình có vô số nghiệm thì $d \equiv d'$.

Nếu hệ phương trình vô nghiệm thì d, d' song song hoặc chéo nhau, lúc đó cần xét thêm các vectơ chỉ phương của chúng (hai đường thẳng chéo nhau khi hai vectơ đó khác phương).

4. *Góc*

+ Cho hai đường thẳng d, d' lần lượt có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a\,;b\,;c)$ và $\vec{u'}(a'\,;b'\,;c')$. Góc φ giữa hai đường thẳng đó được tính theo công thức

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}.\vec{u'}|}{|\vec{u}|.|\vec{u'}|} = \frac{|aa'+bb'+cc'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}\ (0 \le \varphi \le 90^o).$$

+ Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a\,;b\,;c)$ và mp(α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A\,;B\,;C)$. Gọi φ là góc giữa d và (α) thì φ được tính theo công thức

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|} = \frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

5. *Khoảng cách*

+ Khoảng cách từ điểm M_1 tới đường thẳng Δ (đi qua M_o và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$) là :

$$d(M_1, \Delta) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_o}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}.$$

+ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ (đi qua M_o với vectơ chỉ phương $\vec{u}$) và Δ' (đi qua M_o' với vectơ chỉ phương $\vec{u'}$) là :

$$d(\Delta, \Delta') = \frac{\left|\left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{M_oM_o'}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \vec{u'}\right]\right|}.$$

II – ĐỀ BÀI

55. Viết phương trình tham số của đường thẳng d, biết :

a) $d : \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-5}{-3} = \dfrac{z-1}{-4}$;

b) $d : \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{3}$.

56. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d biết :

a) $d : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$ b) $d : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 + 2t. \end{cases}$

57. Viết phương trình tham số hoặc chính tắc của đường thẳng d, biết :

a) d là giao tuyến của hai mặt phẳng

(α): $x - 3y + z = 0$ và (α'): $x + y - z + 4 = 0$;

b) d là giao tuyến của mặt phẳng $y - 2z + 3 = 0$ với mặt phẳng toạ độ (Oyz).

58. Cho hai điểm $A(2 ; 4 ; -1)$ và $B(5 ; 0 ; 7)$. Viết phương trình tham số của đường thẳng AB, tia AB và đoạn thẳng AB.

59. Viết phương trình đường thẳng trong mỗi trường hợp sau đây :

a) Đi qua $A(2 ; 0 ; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$.

b) Đi qua $A(-2 ; 1 ; 2)$ và song song với trục Oz.

c) Đi qua $A(2 ; 3 ; -1)$ và $B(1 ; 2 ; 4)$.

d) Đi qua $A(4 ; 3 ; 1)$ và song song với đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 3 + 2t. \end{cases}$

e) Đi qua $A(1 ; 2 ; -1)$ và song song với đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha) : x + y - z + 3 = 0$ và $(\alpha') : 2x - y + 5z - 4 = 0$.

g) Đi qua $A(-2 ; 1 ; 0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha) : x + 2y - 2z + 1 = 0$.

h) Đi qua $A(2 ; -1 ; 1)$ và vuông góc với hai đường thẳng lần lượt có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1}(-1 ; 1 ; -2)$ và $\overrightarrow{u_2}(1 ; -2 ; 0)$.

60. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng

$$d : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

trên các mặt phẳng toạ độ.

61. a) Viết phương trình hình chiếu của đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$

trên mỗi mặt phẳng sau : mp(Oxy), mp(Oxz), mp(Oyz), mp(α) : $x + y + z - 7 = 0$.

b) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng

$$d : \begin{cases} x = \dfrac{7}{2} + 3t \\ y = -2t \\ z = -2t \end{cases}$$

trên mặt phẳng $(\alpha) : x + 2y - 2z - 2 = 0$.

62. Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng d và d' cho bởi các phương trình sau :

a) $d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-3}{4}$, $\quad d' : \dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$;

b) $d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z}{1}$, $\quad d' : \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+8}{3} = \dfrac{z-4}{1}$;

c) $d : \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{-6} = \dfrac{z+1}{-8}$, $\quad d' : \dfrac{x-7}{-6} = \dfrac{y-2}{9} = \dfrac{z}{12}$;

d) $d : \dfrac{x-1}{9} = \dfrac{y-6}{6} = \dfrac{z-3}{3}$, $\quad d' : \dfrac{x-7}{6} = \dfrac{y-6}{4} = \dfrac{z-5}{2}$;

e) $d : \begin{cases} x = 9t \\ y = 5t \\ z = -3 + t, \end{cases}$

d' là giao tuyến của hai mặt phẳng :

$(\alpha) : 2x - 3y - 3z - 9 = 0$ và $(\alpha') : x - 2y + z + 3 = 0$.

63. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) cho bởi các phương trình sau :

a) $d : \dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$, $\quad (\alpha) : 3x + 5y - z - 2 = 0$;

b) $d : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{3}$, $(\alpha) : 3x - 3y + 2z - 5 = 0$;

c) $d : \dfrac{x-9}{8} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{3}$, $(\alpha) : x + 2y - 4z + 1 = 0$;

d) $d : \dfrac{x-7}{5} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-5}{4}$, $(\alpha) : 3x - y + 2z - 5 = 0$;

e) d là giao tuyến của hai mặt phẳng :

$(P) : 3x + 5y + 7z + 16 = 0$ và $(Q) : 2x - y + z - 6 = 0$,

$(\alpha) : 5x - z - 4 = 0$.

64. Trong không gian toạ độ $Oxyz$ cho bốn đường thẳng :

$d_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{-2}$, $d_2 : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z}{-4}$,

$d_3 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$, $d_4 : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$.

a) Chứng minh hai đường thẳng d_1 và d_2 cùng nằm trên một mặt phẳng. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng đó.

b) Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng d cắt cả bốn đường thẳng đã cho. Hãy viết phương trình chính tắc của đường thẳng d.

65. a) Tìm tập hợp các điểm cách đều ba điểm $A(1 ; 1 ; 1)$, $B(-1 ; 2 ; 0)$, $C(2 ; -3 ; 2)$.

b) Tìm quỹ tích các điểm M cách đều hai trục toạ độ Ox, Oy và điểm $A(1 ; 1 ; 0)$.

66. Trong không gian toạ độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng Δ và Δ', trong đó Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng :

$(\alpha) : 2x + y + 1 = 0$ và $(\beta) : x - y + z - 1 = 0$,

Δ' là giao tuyến của hai mặt phẳng :

$(\alpha') : 3x + y - z + 3 = 0$ và $(\beta') : 2x - y + 1 = 0$.

a) Chứng minh Δ và Δ' cắt nhau.

b) Viết phương trình chính tắc của các đường phân giác của các góc tạo bởi Δ và Δ'.

67. Tính khoảng cách từ điểm M_0 tới đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau :

a) $M_0(2 ; 3 ; 1)$, $\quad d : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$;

b) $M_0(2 ; 3 ; -1)$, d là giao tuyến của hai mặt phẳng

$(\alpha) : x + y - 2z - 1 = 0$ và (α'): $x + 3y + 2z + 2 = 0$;

c) $M_0(1 ; 2 ; 1)$, $\quad d : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+3}{1}$;

d) $M_0(1 ; 0 ; 0)$, $\quad d : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$.

68. Cho đường thẳng d đi qua điểm $M(0; 0; 1)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1; 1; 3)$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x + y - z + 5 = 0$. Chứng minh d song song với (α). Tính khoảng cách giữa d và (α).

69. Tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng sau :

a) $d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t, \\ z = 1 \end{cases}$ $\quad d_2 : \begin{cases} x = 2 - 3t' \\ y = -2 + 3t' \\ z = 3t' ; \end{cases}$

b) $d_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-4}{-2}$, $\quad d_2 : \dfrac{x+2}{-4} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{4}$;

c) $d_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$, $\quad d_2 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t ; \\ z = t \end{cases}$

d) d_1 là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha) : 2x + 3y - 4 = 0$ và

$(\alpha') : y + z - 4 = 0$,

$d_2 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t. \end{cases}$

70. 1. Tính góc giữa đường thẳng $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{1}$ và mỗi trục toạ độ.

2. Tính góc giữa mỗi cặp đường thẳng sau :

a) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + 4t, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 - t' \\ y = -1 + 3t' \\ z = 4 + 2t' ; \end{cases}$

b) $d : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+2}{4}$, d' là giao tuyến của hai mặt phẳng

$(\alpha): x + 2y - z + 1 = 0$ và $(\alpha'): 2x + 3z - 2 = 0$.

71. Tính góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau :

a) $\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 - t, \end{cases}$ $(\alpha) : 2x - y + 2z - 1 = 0$;

b) $\Delta : \dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$, $(\alpha) : x + y - z + 2 = 0$;

c) $\Delta : \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{1}$, $(\alpha) : x + 2y - z + 5 = 0$;

d) $\Delta : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$, $(\alpha) : 2x + y + z - 1 = 0$.

72. a) Tìm toạ độ hình chiếu (vuông góc) của điểm $M_0(1 ; -1 ; 2)$ trên mặt phẳng

$$(\alpha) : 2x - y + 2z + 12 = 0.$$

b) Cho bốn điểm $A(4 ; 1 ; 4)$, $B(3 ; 3 ; 1)$, $C(1 ; 5 ; 5)$, $D(1 ; 1 ; 1)$. Tìm toạ độ hình chiếu của D trên mặt phẳng (ABC).

c) Cho ba điểm $A(1 ; 1 ; 2)$, $B(-2 ; 1 ; -1)$, $C(2 ; -2 ; -1)$. Tìm toạ độ hình chiếu của gốc O trên mặt phẳng (ABC).

73. a) Tìm toạ độ điểm đối xứng của $M_0\ (2 ; -3 ; 1)$ qua mặt phẳng

$$(\alpha) : x + 3y - z + 2 = 0.$$

b) Tìm toạ độ điểm đối xứng của điểm $A(0 ; 0 ; 1)$ qua mặt phẳng :

$$6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

c) Tìm toạ độ điểm đối xứng của điểm $B(2 ; 3 ; 5)$ qua mặt phẳng :

$$2x + 3y + z - 17 = 0.$$

74. a) Cho hai điểm $A(3 ; 1 ; 0)$, $B(-9 ; 4 ; 9)$ và mp$(\alpha) : 2x - y + z + 1 = 0$. Tìm toạ độ điểm M trên (α) sao cho $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

b) Cho hai điểm $A(3 ; 1 ; 1)$, $B(7 ; 3 ; 9)$ và mp$(\alpha) : x + y + z + 3 = 0$. Tìm điểm M trên (α) để $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

75. a) Cho ba điểm $A(-1 ; 3 ; 2)$, $B(4 ; 0 ; -3)$, $C(5 ; -1 ; 4)$. Tìm toạ độ hình chiếu H của điểm A trên đường thẳng BC.

b) Cho đường thẳng $d : \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{-1}$ và điểm $M_0(4 ; -3 ; 2)$. Tìm toạ độ hình chiếu H của M_0 trên đường thẳng d.

76. a) Tìm toạ độ điểm đối xứng của $M_0(2 ; -1 ; 1)$ qua đường thẳng

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t. \end{cases}$$

b) Tìm toạ độ điểm đối xứng của $M_0(-3 ; 1 ; -1)$ qua đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (α): $4x - 3y - 13 = 0$ và (α'): $y - 2z + 5 = 0$.

c) Tìm toạ độ điểm đối xứng của $M_0(2 ; -1 ; 1)$ qua đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (α): $y + z - 4 = 0$ và (α'): $2x - y - z + 2 = 0$.

77. Viết phương trình đường vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau :

a) $d : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z+4}{-5}$, $\quad d' : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z-4}{-1}$;

b) $d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t, \end{cases}$ $\quad d' : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 \\ z = t. \end{cases}$

78. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $B'B$, CD và $A'D'$.

a) Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng $A'B$, $B'D$ và cặp đường thẳng PI, AC' (I là tâm của đáy $ABCD$).

b) Tính góc giữa hai đường thẳng MP và $C'N$.

Tính góc giữa hai mặt phẳng (PAI) và $(DCC'D')$.

79. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SD.

a) Tính khoảng cách từ đỉnh A tới mặt phẳng (BCM) và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, CN.

b) Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC).

c) Tính tỉ số thể tích giữa hai phần của hình chóp $S.ABCD$ chia bởi mặt phẳng (BCM).

80. a) Cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng

$$(\alpha) : x + y + z + 1 = 0 \text{ và } (\alpha') : x - y + z - 1 = 0 ;$$

và cho hai mặt phẳng $(P_1) : x + 2y + 2z + 3 = 0$

$$(P_2) : x + 2y + 2z + 7 = 0.$$

Viết phương trình mặt cầu có tâm I thuộc d và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng (P_1) và (P_2).

b) Cho đường thẳng $d : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ và hai mặt phẳng

$$(P_1) : x + y - 2z + 5 = 0$$

$$(P_2) : 2x - y + z + 2 = 0.$$

Viết phương trình mặt cầu có tâm I thuộc d và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng (P_1) và (P_2).

81. Cho đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(0; 0; 1)$, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(0; 1; 0)$ và đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(0 ; 0 -1)$, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(1 ; 0 ; 0)$. Tìm tập hợp các điểm M nằm trong mỗi mặt phẳng toạ độ và cách đều d_1, d_2.

82. Trong không gian toạ độ $Oxyz$ cho mặt phẳng

$$(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0, ABC \neq 0$$

và điểm $M_o(x_o ; y_o ; z_o)$ không thuộc (α). Các đường thẳng qua M_o lần lượt song song với các trục toạ độ cắt (α) tại M_1, M_2, M_3. Tính thể tích khối tứ diện $M_oM_1M_2M_3$.

83. Trong không gian toạ độ $Oxyz$ cho đường thẳng :

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t. \end{cases}$$

Gọi d' là giao tuyến của hai mặt phẳng

$$(\alpha) : 3y - z - 7 = 0 \text{ và } (\alpha') : 3x + 3y - 2z - 17 = 0.$$

a) Chứng minh d, d' chéo nhau và vuông góc với nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua d' và vuông góc với d. Tìm toạ độ giao điểm H của d và (P).

c) Một mặt phẳng (Q) thay đổi, luôn song song với mp(Oxy), cắt d, d' lần lượt tại M, M'. Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn MM'.

84. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, xét đường thẳng Δ_m là giao tuyến của hai mặt phẳng (α): $mx + y - mz - 1 = 0$ và (α'): $x - my + z - m = 0$.

a) Chứng minh góc giữa Δ_m và trục Oz không đổi ; khoảng cách giữa Δ_m và Oz không đổi.

b) Tìm tập hợp các giao điểm M của Δ_m và mp(Oxy) khi m thay đổi.

85. Trong không gian toạ độ $Oxyz$ cho đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(-23 ; -10 ; 0)$, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(8 ; 4 ; 1)$ và đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(3 ; -2 ; 0)$, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(2 ; -2 ; 1)$.

a) Viết phương trình các mặt phẳng (P_1), (P_2) lần lượt đi qua d_1, d_2 và song song với nhau.

b) Tính khoảng cách giữa d_1 và d_2.

c) Viết phương trình đường thẳng Δ song song với Oz và cắt cả d_1, d_2.

86. Trong không gian toạ độ $Oxyz$ cho $A(1 ; 2 ; -1)$, $B(-1 ; 1 ; 1)$, $C(1 ; 0 ; 1)$.

a) Chứng minh $OABC$ là một tứ diện vuông đỉnh O.

b) Chứng minh rằng ngoài điểm O còn có một điểm S duy nhất sao cho $SABC$ là tứ diện vuông đỉnh S. Tìm toạ độ của S.

c) Mặt phẳng (Oxy) chia tam giác ABC thành hai phần, tính tỉ số diện tích hai phần đó.

d) Tính góc giữa mp(ABC) và mp(Oxy).

87. Trong không gian toạ độ $Oxyz$ cho mặt cầu

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z - 113 = 0$$

và hai đường thẳng

$$d : \frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+13}{2}, \qquad d' : \begin{cases} x = -7 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = 8. \end{cases}$$

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) và vuông góc với d.

b) Viết phương trình mặt phẳng (Q) tiếp xúc với (S) và song song với cả d, d'.

88. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, xét mặt phẳng

$(\alpha_m) : 3mx + 5\sqrt{1-m^2}\, y + 4mz + 20 = 0,\ m \in [-1 ; 1]$.

a) Tính khoảng cách từ gốc O tới mặt phẳng (α_m).

b) Chứng minh rằng với mọi $m \in [-1 ; 1]$, (α_m) tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

c) Với giá trị nào của m, hai mặt phẳng (α_m) và (Oxz) cắt nhau ? Khi m thay đổi, chứng minh rằng các giao tuyến đó song song.



Ôn tập chương III

Bài tập tự luận

89. Dùng phương pháp hình học, hãy giải các bài toán sau :

a) Chứng minh

$\sqrt{5x+2} + \sqrt{5y+2} + \sqrt{5z+2} \le 6\sqrt{3},\ \forall x, y, z \ge -\frac{2}{5},\ x + y + z = 6.$

b) Chứng minh $\left|\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x\sqrt{2 - \sin^2 x}\right| \le 3,\ \forall x.$

c) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = \sqrt{x+m} + \sqrt{x+n} + \sqrt{m+n}$$

với $x, m, n \ge 0,\ x + m + n = 1$.

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + 4} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2 + 1},\ \forall x, y.$$

e) Chứng minh :

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}\geq 2\sqrt{2},\forall x,y,z.$$

Dấu = xảy ra khi nào ?

90. Trong không gian toạ độ $Oxyz$ cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) có phương trình :

$$d:\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1},$$

$$(P): 3x+5y-z-2=0.$$

a) Tìm toạ độ giao điểm A của đường thẳng d với mặt phẳng (P). Tính góc giữa d và (P).

b) Viết phương trình mặt phẳng (P') đi qua điểm $M_0(1 ; 2 ; -1)$ và vuông góc với đường thẳng d.

c) Viết phương trình hình chiếu vuông góc d' của d trên mặt phẳng (P).

d) Cho điểm $B(1 ; 0 ; -1)$, hãy tìm toạ độ điểm B' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng BB'.

e) Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), vuông góc và cắt đường thẳng d.

91. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng

$$(\alpha): 2x-y+3z+1=0,$$

$$(\alpha'): x-y+z+5=0$$

và điểm $M(1 ; 0 ; 5)$.

a) Chứng minh (α) và (α') cắt nhau. Tính góc giữa (α) và (α').

b) Viết phương trình tham số của giao tuyến Δ của (α) và (α').

c) Gọi H là hình chiếu của M trên mp(α), K là hình chiếu của M trên mp(α'). Tính độ dài đoạn HK.

d) Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ.

e) Viết phương trình đường thẳng đi qua M, vuông góc với Δ và cắt Δ.

g) Viết phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến của (α), (α') và vuông góc với mặt phẳng $(P): 3x-y+1=0$.

92. Trong không gian toạ độ $Oxyz$ cho đường thẳng :

$$\Delta : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4. \end{cases}$$

Gọi Δ' là giao tuyến của hai mặt phẳng

$$(\alpha) : x - 3y + z = 0 \quad \text{và} \quad (\alpha') : x + y - z + 4 = 0$$

và điểm $M_0(1 ; 1 ; 2)$.

a) Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ và Δ'.

b) Viết phương trình mặt phẳng chứa Δ' và song song với Δ.

c) Viết phương trình mặt phẳng qua M_0 và vuông góc với Δ.

d) Viết phương trình đường thẳng qua M_0, cắt cả Δ và Δ'.

e) Tính khoảng cách giữa Δ và Δ'.

g) Viết phương trình đường vuông góc chung của Δ và Δ'.

93. Trong không gian toạ độ Oxyz cho bốn điểm $A(-2 ; 1 ; 2)$, $B(0 ; 4 ; 1)$, $C(5 ; 1 ; -5)$, $D(-2 ; 8 ; -5)$ và đường thẳng $d : \dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y+11}{5} = \dfrac{z-9}{-4}$.

a) Chứng minh A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.

b) Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

c) Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

d) Tìm toạ độ các giao điểm M, N của đường thẳng d với mặt cầu (S).

e) Viết phương trình các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại M, N. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng đó.

94. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Xét hai điểm M trên AD' và N trên DB sao cho $AM = DN = k$ $(0 < k < a\sqrt{2})$. Gọi P là trung điểm của $B'C'$.

a) Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng AP và BC'.

b) Tính thể tích khối tứ diện $APBC'$.

c) Chứng minh MN luôn song song với mặt phẳng $(A'D'CB)$ khi k thay đổi.

d) Tìm k để đoạn thẳng MN ngắn nhất.

e) Khi đoạn MN ngắn nhất, chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của AD' và DB, đồng thời MN song song với $A'C$.

95. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho sáu điểm $A(2 ; 0 ; 0)$; $A'(6 ; 0 ; 0)$; $B(0 ; 3 ; 0)$; $B'(0 ; 4 ; 0)$; $C(0 ; 0 ; 3)$ và $C'(0 ; 0 ; 4)$.

a) Viết phương trình mp(ABC) và mp($A'B'C'$). Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng đó.

b) Viết phương trình giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (ABC) và ($A'B'C'$). Tính khoảng cách từ gốc O tới đường thẳng Δ.

c) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, H' là trực tâm của tam giác $A'B'C'$. Chứng minh ba điểm O, G, H' thẳng hàng. Xác định toạ độ điểm H'.

d) Gọi O' là điểm đối xứng của O qua mặt phẳng (ABC). Điểm O' có thuộc mp($A'B'C'$) không ?

e) Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, A', B, C. Chứng minh rằng mặt cầu đó cũng đi qua B' và C'.

g) Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với mặt phẳng toạ độ (Oxy).

Bài tập trắc nghiệm

1. Cho $A(2 ; -1 ; 6)$, $B(-3 ; -1 ; -4)$, $C(5 ; -1 ; 0)$, $D(1 ; 2 ; 1)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

(A) 30 ; (B) 40 ; (C) 50 ; (D) 60.

2. Cho $A(2 ; 1 ; -1)$, $B(3 ; 0 ; 1)$, $C(2 ; -1 ; 3)$, điểm D thuộc Oy và thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 5. Toạ độ của đỉnh D là

(A) $(0 ; -7 ; 0)$; (B) $(0 ; 8 ; 0)$; (C) $\left[\begin{array}{l}(0 ; -7 ; 0) \\ (0 ; 8 ; 0)\end{array}\right.$; (D) $\left[\begin{array}{l}(0 ; -8 ; 0) \\ (0 ; 7 ; 0).\end{array}\right.$

3. Cho $A(0 ; 0 ; 2)$, $B(3 ; 0 ; 5)$, $C(1 ; 1 ; 0)$, $D(4 ; 1 ; 2)$. Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mp(ABC) là

(A) $\sqrt{11}$; (B) $\dfrac{\sqrt{11}}{11}$; (C) 1 ; (D) 11.

4. Cho $A(0 ; 2 ; -2)$, $B(-3 ; 1 ; -1)$, $C(4 ; 3 ; 0)$ và $D(1 ; 2 ; m)$. Tìm m để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.

Một học sinh giải như sau :

Bước 1 : $\overrightarrow{AB} = (-3\ ;\ -1\ ;\ 1)$; $\overrightarrow{AC} = (4\ ;\ 1\ ;\ 2)$; $\overrightarrow{AD} = (1\ ;\ 0\ ;\ m+2)$.

Bước 2 : $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \left(\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 4\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-3 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}\right) = (-3\ ;\ 10\ ;\ 1)$;

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = 3 + m + 2 = m + 5.$$

Bước 3 : A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow m + 5 = 0.$

Đáp số : $m = -5$.

Bài giải trên đúng hay sai ? Nếu sai thì sai ở bước nào ?

(A) Đúng ; (B) Sai ở bước 1 ; (C) Sai ở bước 2 ; (D) Sai ở bước 3.

5. Cho hai điểm $M(-2\ ;\ 3\ ;\ 1)$, $N(5\ ;\ 6\ ;\ -2)$. Đường thẳng MN cắt mp(Oxz) tại điểm A. Điểm A chia đoạn MN theo tỉ số

(A) 2 ; (B) -2 ; (C) $-\frac{1}{2}$; (D) $\frac{1}{2}$.

6. Cho $A(2\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 2\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 0\ ;\ 2)$, $D(2\ ;\ 2\ ;\ 2)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bán kính là

(A) 3 ; (B) $\sqrt{3}$; (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh AD và BB'. Côsin của góc giữa hai đường thẳng MN và AC' là

(A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; (C) $\frac{1}{2}$; (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Cho vectơ $\vec{u}(1;1;-2)$ và $\vec{v}(1;0;m)$. Tìm m để góc giữa hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ có số đo bằng 45°.

Một học sinh giải như sau :

Bước 1 : $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{1-2m}{\sqrt{6}.\sqrt{m^2+1}}$.

Bước 2 : Góc giữa $\vec{u}, \vec{v}$ bằng 45° suy ra $\dfrac{1-2m}{\sqrt{6}\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow 1 - 2m = \sqrt{3}\sqrt{m^2+1}. \qquad (*)$$

Bước 3 : Phương trình (*) $\Leftrightarrow (1 - 2m)^2 = 3(m + 1)$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 - \sqrt{6} \\ m = 2 + \sqrt{6}. \end{array}\right.$$

Bài giải đúng hay sai ? Nếu sai thì sai ở bước nào ?

(A) Đúng ; (B) Sai ở bước 1 ; (C) Sai ở bước 2 ; (D) Sai ở bước 3.

9. Cho $A(1 ; 1 ; 3)$, $B(-1 ; 3 ; 2)$, $C(-1 ; 2 ; 3)$. Khoảng cách từ gốc toạ độ O tới mp(ABC) bằng

(A) $\sqrt{3}$; (B) 3 ; (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (D) $\frac{3}{2}$.

10. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $G(1 ; 1 ; 1)$, mặt phẳng qua G và vuông góc với đường thẳng OG có phương trình là

(A) $x + y + z - 3 = 0$; (B) $x + y + z = 0$;

(C) $x - y + z = 0$; (D) $x + y - z - 3 = 0$.

11. Cho hai mặt phẳng $(\alpha) : 3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và $(\beta) : 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng qua gốc toạ độ O, đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là

(A) $2x + y - 2z + 1 = 0$; (B) $2x + y - 2z = 0$;

(C) $2x - y - 2z = 0$; (D) $2x - y + 2z = 0$.

12. Phương trình mp(P) chứa trục Oy và điểm $M(1 ; -1 ; 1)$ là

(A) $x + z = 0$; (B) $x - y = 0$; (C) $x - z = 0$; (D) $x + y = 0$.

13. Cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$

và mặt phẳng $(\alpha) : 4x + 3y - 12z + 10 = 0$.

Mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với (α) có phương trình là

(A) $4x + 3y - 12z + 78 = 0$; (B) $4x + 3y - 12z - 26 = 0$;

(C) $\left[\begin{array}{l} 4x + 3y - 12z - 78 = 0 \\ 4x + 3y - 12z + 26 = 0; \end{array}\right.$ (D) $\left[\begin{array}{l} 4x + 3y - 12z + 78 = 0 \\ 4x + 3y - 12z - 26 = 0. \end{array}\right.$

14. Cho hai mặt phẳng

$$(\alpha) : m^2x - y + (m^2 - 2)z + 2 = 0 \text{ và } (\beta) : 2x + m^2y - 2z + 1 = 0.$$

(α) vuông góc với (β) khi

(A) $|m| = 2$; (B) $|m| = 1$; (C) $|m| = \sqrt{2}$; (D) $|m| = \sqrt{3}$.

15. Trong không gian $Oxyz$ cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ với $A(0 ; 0 ; 0)$, $B(1 ; 0 ; 0)$, $D(0 ; 1 ; 0)$, $A'(0 ; 0 ; 1)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và MN.

Một học sinh giải như sau :

Bước 1 : Xác định $\overrightarrow{A'C} = (1 ; 1 ; -1)$; $\overrightarrow{MN} = (0 ; 1 ; 0)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}\right] = (1 ; 0 ; 1)$.

Bước 2 : Mặt phẳng (α) chứa $A'C$ và song song với MN là mặt phẳng qua $A'(0 ; 0 ; 1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1 ; 0 ; 1) \Rightarrow (\alpha) : x + z - 1 = 0$.

Bước 3 : $d(A'C, MN) = d(M, (\alpha)) = \dfrac{\left|\frac{1}{2} + 0 - 1\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Bài giải đúng hay sai ? Nếu sai thì sai ở bước nào ?

(A) Đúng ; (B) Sai ở bước 1 ; (C) Sai ở bước 2 ; (D) Sai ở bước 3.

16. Cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$; $d_2 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ và điểm $A(1 ; 2 ; 3)$. Đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là

(A) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-3}{-5}$;

(B) $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-3}{-5}$;

(C) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{5}$;

(D) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{-5}$.

17. Cho $A(0 ; 0 ; 1)$, $B(-1 ; -2 ; 0)$, $C(2 ; 1 ; -1)$. Đường thẳng Δ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mp(ABC) có phương trình là

(A) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} - 5t \\ y = -\dfrac{1}{3} - 4t \\ z = 3t \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} + 5t \\ y = -\dfrac{1}{3} - 4t \\ z = 3t \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} + 5t \\ y = -\dfrac{1}{3} + 4t \\ z = 3t \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} - 5t \\ y = -\dfrac{1}{3} - 4t \\ z = -3t. \end{cases}$

18. Cho đường thẳng $d : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z}{2}$, mp$(\alpha)$: $x + y - z + 3 = 0$ và điểm $A(1 ; 2 ; -1)$. Đường thẳng Δ qua A cắt d và song song với mp(α) có phương trình là

(A) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{1}$; (B) $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$;

(C) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{-1}$; (D) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{1}$.

19. Cho mặt phẳng (P) : $3x + 4y + 5z + 8 = 0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) : $x - 2y + 1 = 0$ và (β) : $x - 2z - 3 = 0$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mp(P). Khi đó

(A) $\varphi = 30^o$; (B) $\varphi = 45^o$; (C) $\varphi = 60^o$; (D) $\varphi = 90^o$.

20. Cho $A(5 ; 1 ; 3)$, $B(-5 ; 1 ; -1)$, $C(1 ; -3 ; 0)$, $D(3 ; -6 ; 2)$. Toạ độ của điểm A' đối xứng với A qua mp(BCD) là

(A) $(-1 ; 7 ; 5)$; (B) $(1 ; 7 ; 5)$; (C) $(1 ; -7 ; 5)$; (D) $(1 ; -7 ; -5)$.

21. Cho $A(3 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; -6 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 6)$ và mp(α) $x + y + z - 4 = 0$. Toạ độ hình chiếu vuông góc của trọng tâm tam giác ABC trên mp(α) là

(A)$(2 ; -1 ; 3)$; (B) $(2 ; 1 ; 3)$; (C) $(-2 ; -1 ; 3)$; (D) $(2 ; -1 ; -3)$.

22. Cho đường thẳng d : $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng toạ độ (Oxy) là

(A) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 - t \\ z = 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0. \end{cases}$

23. Cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = -8 + 4t \\ y = 5 - 2t \\ z = t \end{cases}$ và điểm $A(3 ; -2 ; 5)$. Toạ độ hình chiếu của điểm A trên d là

(A) $(4 ; -1 ; 3)$; (B) $-4 ; 1 ; -3)$; (C) $(4 ; -1 ; -3)$; (D) $(-4 ; -1 ; 3)$.

24. Cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$ và $d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$.

Khoảng cách giữa d_1 và d_2 bằng

(A) $4\sqrt{2}$; (B) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$; (C) $\frac{4}{3}$; (D) $\frac{4\sqrt{3}}{2}$.

25. Cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 \\ z = t. \end{cases}$

Mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình là

(A) $x + 5y + 2z + 12 = 0$; (B) $x + 5y - 2z + 12 = 0$;

(C) $x - 5y + 2z - 12 = 0$; (D) $x + 5y + 2z - 12 = 0$.

26. Cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 5 - t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 9 - 2t \\ y = t \\ z = -2 + t. \end{cases}$

Mặt phẳng chứa cả d_1 và d_2 có phương trình là

(A) $3x - 5y + z - 25 = 0$; (B) $3x + 5y + z - 25 = 0$;

(C) $3x - 5y - z + 25 = 0$; (D) $3x + y + z - 25 = 0$.

27. Cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{2}$ và mp$(P) : x - 2y + 2z - 1 = 0$.

Mặt phẳng chứa d và vuông góc với mp(P) có phương trình là

(A) $2x - 2y + z - 8 = 0$; (B) $2x - 2y + z + 8 = 0$;

(C) $2x + 2y + z - 8 = 0$; (D) $2x + 2y - z - 8 = 0$.

28. Cho hai điểm $A(1 ; 4 ; 2)$, $B(-1 ; 2 ; 4)$ và đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$.

Điểm $M \in \Delta$ mà $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất có toạ độ là

(A) $(-1 ; 0 ; 4)$; (B) $(0 ; -1 ; 4)$; (C) $(1 ; 0 ; 4)$; (D) $(1 ; 0 ; -4)$.

29. Cho hai điểm $A(3 ; 3 ; 1)$, $B(0 ; 2 ; 1)$ và mp$(P) : x + y + z - 7 = 0$. Đường thẳng d nằm trên mp(P) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B có phương trình là

(A) $\begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x = t \\ y = 7 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = -t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 7 - 3t \\ z = t. \end{cases}$

30. Cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$ và $d_2 : \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

Phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2 là

(A) $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-4}$; (B) $\frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-9}{4}$;

(C) $\frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-9}{4}$; (D) $\frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-9}{-4}$.

31. Cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{1}$ và $d_2 : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2. \end{cases}$

Đường thẳng đi qua điểm $A(0 ; 1 ; 1)$, vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là

(A) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{4}$; (B) $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$;

(C) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$; (D) $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{4}$.

32. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a và $AB' \perp BC'$. Tính thể tích khối lăng trụ.

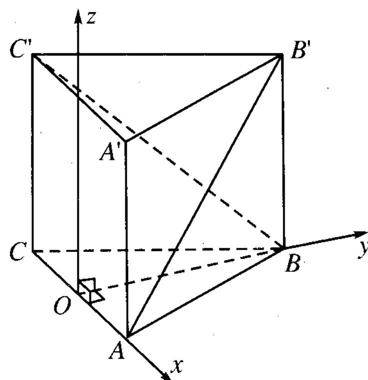
Một học sinh giải như sau :

Bước 1 : Chọn hệ trục toạ độ như hình 95. Khi đó

$$A = \left(\frac{a}{2} ; 0 ; 0\right) ; \ B = \left(0 ; \frac{a\sqrt{3}}{2} ; 0\right) ; \ B' = \left(0 ; \frac{a\sqrt{3}}{2} ; h\right) ;$$

$$C = \left(-\frac{a}{2} ; 0 ; 0\right) ; \ C' = \left(-\frac{a}{2} ; 0 ; h\right)$$

(h là chiều cao của lăng trụ), suy ra



Hình 95

$$\overrightarrow{AB'} = \left(-\frac{a}{2} ; \frac{a\sqrt{3}}{2} ; h\right),$$

$$\overrightarrow{BC'} = \left(-\frac{a}{2} ; -\frac{a\sqrt{3}}{2} ; h\right).$$

Bước 2 : $AB' \perp BC'$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'} = 0 \Rightarrow \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} + h^2 = 0$$

$$\Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Bước 3 : $V_{\text{lăng trụ}} = Bh = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} . \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}.$

Bài giải đúng hay sai ? Nếu sai thì sai ở bước nào ?

(A) đúng ; (B) Sai ở bước 1 ; (C) Sai ở bước 2 ; (D) Sai ở bước 3.

B - LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

§1. Hệ toạ độ trong không gian

1. a) $\vec{x} = (1 - 2 ; 2 - 2 ; 3 + 1) = (-1 ; 0 ; 4).$

b) $\vec{x} = (-1 + 8 ; 0 + 0 ; 4 - 8) = (7 ; 0 ; -4).$

c) $\vec{x} = (2 + 8 - 4 ; 4 + 8 - 0 ; 6 - 4 + 4) = (6 ; 12 ; 6).$

d) $\vec{x} = (5 - 6 - 2 ; 10 - 6 + 0 ; 15 + 3 + 2) = (-3 ; 4 ; 20).$

e) $2\vec{x} = 3\vec{u} + \vec{w} \Rightarrow \vec{x} = \frac{3}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}$.

$$\Rightarrow \vec{x} = \left(\frac{3}{2} + 2 \ ; \ 3 + 0 \ ; \ \frac{9}{2} - 2\right) = \left(\frac{7}{2} \ ; \ 3 \ ; \ \frac{5}{2}\right).$$

g) $3\vec{x} = -2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = (-2 - 2 + 4 \ ; -4 - 2 + 0 \ ; -6 + 1 - 4)$

$\Rightarrow 3\vec{x} = (0 \ ; -6 \ ; -9) \Rightarrow \vec{x} = (0 \ ; -2 \ ; -3)$.

2. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{u}$.

3. Ta có $\vec{u} = (-3 \ ; 4 \ ; 2)$, $\vec{a} = (-6 \ ; 8 \ ; 4)$, $\vec{b} = (0 \ ; 4 \ ; 2)$, $\vec{c} = (1 \ ; -4 \ ; 2)$.

Chỉ có vectơ $\vec{a}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}$.

4. a) Gọi toạ độ điểm cuối là $(x \ ; y \ ; z)$. Ta có

$$(x - 0 \ ; y - 6 \ ; z - 2) = (3 \ ; -5 \ ; 6)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 0 = 3 \\ y - 6 = -5 \\ z - 2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 8. \end{cases}$$

Đáp số : (3 ; 1 ; 8).

b) (1 ; 0 ; 3).

5. a) $\overrightarrow{CA} = (1 \ ; 3 \ ; 0)$, $\overrightarrow{CB} = (0 \ ; 1 \ ; 1)$.

Cách 1 : A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k$ để $\overrightarrow{CA} = k.\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \exists k$ để $\begin{cases} 1 = k.0 \\ 3 = k.1 \\ 0 = k.1. \end{cases}$

Điều này không xảy ra.

Vậy A, B, C không thẳng hàng.

Cách 2 : $\left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right] = \left(\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = (3 \ ; -1 \ ; 1) \neq \vec{0}$

$\Rightarrow A, B, C$ không thẳng hàng.

b) $\overrightarrow{CA} = (10 \ ; -4 \ ; 0)$, $\overrightarrow{CB} = (5 \ ; -2 \ ; 0) \Rightarrow \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CB} \Rightarrow A, B, C$ thẳng hàng.

Cách khác : $\left[\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right] = \left(\begin{vmatrix}-4 & 0\\-2 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & 10\\0 & 5\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}10 & -4\\5 & -2\end{vmatrix}\right) = (0 ; 0 ; 0) = \vec{0}$

$\Rightarrow A, B, C$ thẳng hàng.

c) Không thẳng hàng.

d) $\overrightarrow{CA} = (-2 ; 0 ; 0)$, $\overrightarrow{CB} = (-3 ; 0 ; 1) \Rightarrow A, B, C$ không thẳng hàng.

e) Không thẳng hàng.

6. a) A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = k \\ y - 5 = 2k \\ 3 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 11 \\ k = 3. \end{cases}$$

Vậy với $x = 5, y = 11$ thì A, B, C thẳng hàng.

b) Vì $z_A = 6$, $z_B = -2 \Rightarrow z_A . z_B < 0 \Rightarrow A, B$ ở hai phía của mp(Oxy).

Vậy $MA + MB$ nhỏ nhất khi A, B, M thẳng hàng hay

$\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right] = \vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4 ; -12 ; -8)$.

Giả sử $M(x ; y ; 0) \in$ mp(Oxy) thì $\overrightarrow{AM} = (x + 1 ; y - 6 ; -6)$.

$$\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right] = \left(\begin{vmatrix}y-6 & -6\\-12 & -8\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-6 & x+1\\-8 & 4\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}x+1 & y-6\\4 & -12\end{vmatrix}\right)$$

$$= (-8y - 24 ; 8x - 16 ; -12x - 4y + 12).$$

Ta có : $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right] = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -8y - 24 = 0 \\ 8x - 16 = 0 \\ -12x - 4y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3. \end{cases}$

Vậy $MA + MB$ ngắn nhất khi $M = (2 ; -3 ; 0)$.

7. Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (0 ; 4 ; 0)$, vậy $ABCD$ là hình bình hành.

Lại có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0 \Rightarrow \widehat{BAD} = 90^{\circ}$. Vậy $ABCD$ là hình chữ nhật.

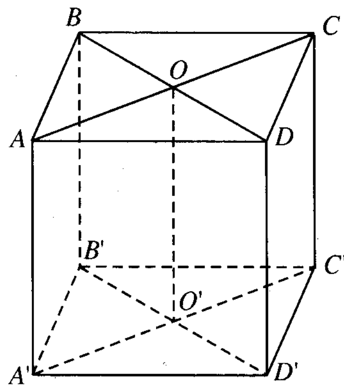
Vì $\overrightarrow{AC} = (3 ; 4 ; 0)$ nên độ dài đường chéo của hình chữ nhật là

$$AC = \left|\overrightarrow{AC}\right| = BD = 5.$$

Tâm O của hình chữ nhật là trung điểm của đường chéo AC nên $O = \left(\frac{5}{2} ; 1 ; 1\right)$.

$$\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = \frac{9-16}{\sqrt{25}.\sqrt{25}} = \frac{-7}{25}.$$

8. (h.96) a) Đặt $O = AC \cap BD$, $O' = A'C' \cap B'D'$.



Hình 96

Ta có : $O = \left(\frac{x_1 + x_3}{2}; \frac{y_1 + y_3}{2}; \frac{z_1 + z_3}{2}\right)$,

$O' = \left(\frac{x_2' + x_4'}{2}, \frac{y_2' + y_4'}{2}, \frac{z_2' + z_4'}{2}\right)$.

Từ $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OO'}$, $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{OO'}$,

$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OO'}$, $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{OO'}$

suy ra :

$$A' = \left(\frac{x_1 + x_2' + x_4' - x_3}{2}; \frac{y_1 + y_2' + y_4' - y_3}{2}; \frac{z_1 + z_2' + z_4' - z_3}{2}\right),$$

$$C' = \left(\frac{x_2' + x_4' - x_1 + x_3}{2}; \frac{y_2' + y_4' - y_1 + y_3}{2}; \frac{z_2' + z_4' - z_1 + z_3}{2}\right),$$

$$B = \left(\frac{x_1 + x_3 + x_2' - x_4'}{2}; \frac{y_1 + y_3 + y_2' - y_4'}{2}; \frac{z_1 + z_3 + z_2' - z_4'}{2}\right),$$

$$D = \left(\frac{x_1 + x_3 - x_2' + x_4'}{2}; \frac{y_1 + y_3 - y_2' + y_4'}{2}; \frac{z_1 + z_3 - z_2' + z_4'}{2}\right).$$

b) Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Đặt $C = (x ; y ; z)$, ta có

$$\begin{cases} x - 1 = (2-1) + (1-1) \\ y - 0 = (1-0) + (-1-0) \\ z - 1 = (2-1) + (1-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow C = (2 ; 0 ; 2).$$

Mặt khác $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow A' = (3 ; 5 ; -6)$

$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow B' = (4 ; 6 ; -5)$

$\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow D' = (3 ; 4 ; -6)$.

9. a) $[\vec{u},\vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \right) = (7 ; 10 ; 9).$

b) $\vec{u} = (3 ; 2 ; -1)$, $\vec{v} = (-1 ; -3 ; 1)$

$\Rightarrow [\vec{u},\vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \right) = (-1 ; -2 ; -7).$

c) $[\vec{u},\vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-4 ; -6 ; -3).$

d) $\vec{u} = (4 ; 0 ; 1)$, $\vec{v} = (2 ; -1 ; 0)$

$\Rightarrow [\vec{u},\vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (1 ; 2 ; -4).$

10. a) $[\vec{u},\vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-11 ; -8 ; 12).$

$\Rightarrow [\vec{u},\vec{v}].\vec{w} = (-11).1 + (-8)(-2) + 12.2 = 29.$

b) $[\vec{u},\vec{v}].\vec{w} = 80.$

c) $[\vec{u},\vec{v}].\vec{w} = 1.$

11. Ta gọi $A(1 ; 1 ; 1)$, $B(2 ; 3 ; 4)$; $C(7 ; 7 ; 5)$; $D(6 ; 5 ; 2)$.

Khi đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (1 ; 2 ; 3)$. Vậy $ABCD$ là hình bình hành.

Suy ra $S_{ABCD} = \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \right] \right|.$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1 ; 2 ; 3)$, $\overrightarrow{AD} = (5 ; 4 ; 1)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \right] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \right) = (-10 ; 14 ; -6)$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \sqrt{(-10)^2 + 14^2 + (-6)^2} = \sqrt{332} = 2\sqrt{83}.$

12. $V_{\text{hộp}} = 75.$

13. a) Điểm cần tìm có toạ độ $(0 ; y ; 0)$.

Từ giả thiết tính được $y = \dfrac{11}{6}$.

Đáp số: $\left(0 ; \dfrac{11}{6} ; 0 \right)$.

b) Điểm M cần tìm thuộc mp(Oxz) nên $M = (x ; 0 ; z)$.

Từ giả thiết, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-1)^2+(0-1)^2+(z-1)^2=(x+1)^2+(0-1)^2+z^2\\(x-1)^2+(0-1)^2+(z-1)^2=(x-3)^2+(0-1)^2+(z+1)^2.\end{cases}$$

Giải hệ, ta được $x = \frac{5}{6},\ z = -\frac{7}{6}$. Vậy $M = \left(\frac{5}{6} ; 0 ; -\frac{7}{6}\right)$.

14. Đường thẳng AB cắt mp(Oyz) tại $M \Rightarrow M = (0 ; y ; z)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = (2 ; -1-y ; 7-z),\ \overrightarrow{MB} = (4 ; 5-y ; -2-z).$$

Từ $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, ta có hệ $\begin{cases}2 = k.4\\-1-y = k(5-y)\\7-z = k(-2-z)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k = \frac{1}{2}\\y = -7\\z = 16.\end{cases}$

15. a) Không đồng phẳng.

b) Đồng phẳng.

c) Đồng phẳng.

d) Không đồng phẳng.

16. a) $[\vec{u},\vec{v}] = \left(\begin{vmatrix}-1 & 1\\3 & -1\end{vmatrix} ; \begin{vmatrix}1 & 2\\-1 & m\end{vmatrix} ; \begin{vmatrix}2 & -1\\m & 3\end{vmatrix}\right)$

$= (-2 ; m+2 ; m+6)$.

$[\vec{u},\vec{v}].\vec{w} = -2 + 2m + 4 + m + 6 = 3m + 8$.

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{u},\vec{v}].\vec{w} = 0 \Leftrightarrow 3m + 8 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{8}{3}$.

b) $m \neq 1$ và $m \neq 9$.

c) Gọi vectơ phải tìm là $\vec{w}(x ; y ; z)$.

Theo giả thiết $|\vec{w}| = x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$\cos(\vec{u},\vec{w}) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{x+y+2z}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow x + y + 2z = \sqrt{3}$.

Mặt khác $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng nên $\vec{w} = k\vec{u} + l\vec{v}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k - l \\ y = k + 3l \\ z = 2k + l \end{cases} \Rightarrow 5x + 3y - 4z = 0.$$

Vậy ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + 2z = \sqrt{3} \\ 5x + 3y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5z - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} - 7z \end{cases}$$

$$\Rightarrow 150z^2 - 100\sqrt{3}z + 49 = 0$$

$$\Rightarrow z = \frac{(10 \pm \sqrt{2})\sqrt{3}}{30} \Rightarrow x = \frac{(1 \pm \sqrt{2})\sqrt{3}}{6}, y = \frac{(5 \mp 7\sqrt{2})\sqrt{3}}{30}.$$

Kết luận : Có hai vectơ thoả mãn yêu cầu của bài toán :

$$\left(\frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{3}}{6}; \frac{(5-7\sqrt{2})\sqrt{3}}{30}; \frac{(10+\sqrt{2})\sqrt{3}}{30}\right),$$

$$\left(\frac{(1-\sqrt{2})\sqrt{3}}{6}; \frac{(5+7\sqrt{2})\sqrt{3}}{30}; \frac{(10-\sqrt{2})\sqrt{3}}{30}\right).$$

17. a) $[\vec{u},\vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right) = (7 ; -3 ; -5)$

$$\Rightarrow [\vec{u},\vec{v}].\vec{w} = 21 + 6 - 20 = 7 \neq 0.$$

Vậy $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ không đồng phẳng.

b) $\vec{a} = m\vec{u} + n\vec{v} + k\vec{w}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 2n + 3k = -4 \\ 7m + 3n - 2k = -12 \\ n + 4k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ n = 7 \\ k = -1. \end{cases}$$

Vậy $\vec{a} = -5\vec{u} + 7\vec{v} - \vec{w}$.

18. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy ba điểm A, B, C sao cho :

$$OA = OB = OC = 1.$$

Khi đó vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ là vectơ chỉ phương của tia phân giác trong của góc yOz. Từ giả thiết ta suy ra :

$$\overrightarrow{OA}.\vec{u} = 0$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = 0$$
$$\Leftrightarrow OA.OB.\cos\widehat{xOy} + OA.OC.\cos\widehat{xOz} = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos\widehat{xOy} + \cos\widehat{xOz} = 0$$
$$\Rightarrow \widehat{xOy} + \widehat{xOz} = 180^\circ.$$

19. a) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2 + m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$

b) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow 3 + \log_3 5.\log_5 3 + 4m = 0 \Leftrightarrow 4 + 4m = 0 \Rightarrow m = -1.$

c) $t = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}$ hoặc $t = \frac{2\pi}{3} + l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

d) $\vec{b} = (4\sqrt{2}; -2; 8)$ hoặc $\vec{b} = (-4\sqrt{2}; 2; -8)$.

e) Vì $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$ nên $\vec{b} = (2k; -k; 0)$.

Ta có $\vec{a}.\vec{b} = 10 \Rightarrow 4k + k = 10 \Rightarrow k = 2$.

Vậy vectơ phải tìm là $\vec{b} = (4; -2; 0)$.

20. a) Giả sử $\vec{u}(x; y; z)$ là vectơ đơn vị phải tìm. Từ giả thiết ta có hệ :

$$\begin{cases} |\vec{u}| = 1 \\ \vec{u}.\vec{i} = 0 \\ \vec{u}.\vec{a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = 0 \\ 3x + 6y + 8z = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 0, y = -\frac{4}{5}, z = \frac{3}{5}$ hoặc $x = 0, y = \frac{4}{5}, z = -\frac{3}{5}$.

Có hai vectơ $\vec{u}$ với toạ độ là $\left(0; -\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$, $\left(0; \frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$.

b) Giả sử $\vec{b}(x; y; z)$ là vectơ phải tìm. Từ giả thiết ta có hệ

$$\begin{cases} \vec{b} = k\vec{a} \\ |\vec{b}| = \sqrt{14} \\ \vec{b}.\vec{j} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = -2k \\ z = 3k \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14, y > 0. \end{cases}$$

Vì $y = -2k > 0$ nên $k < 0$.

Ta có $\begin{cases} k^2 + 4k^2 + 9k^2 = 14 \\ k < 0 \end{cases} \Rightarrow k = -1.$

Vậy $\vec{b} = (-1 ; 2 ; -3)$.

c) $\vec{u} = \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2} ; \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} ; 1\right)$ hoặc $\vec{u} = \left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2} ; \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} ; 1\right)$.

d) Giả sử $\vec{u} = (x ; y ; z)$ là vectơ phải tìm. Từ giả thiết của bài toán, ta có hệ :

$$\begin{cases} \vec{u}.\vec{a} = 0 \\ \vec{u}.\vec{b} = 0 \\ |\vec{u}| = 3 \\ \vec{u}.\vec{k} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z < 0. \end{cases}$$

Từ hai phương trình đầu của hệ rút ra $x = -2z$, $y = z$, thế vào phương trình thứ ba của hệ, ta có : $6z^2 = 9$.

Vì $z < 0$ nên $z = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, suy ra $x = 2\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $y = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Vectơ $\vec{u}$ phải tìm là $\vec{u} = \left(2\sqrt{\dfrac{3}{2}} ; -\sqrt{\dfrac{3}{2}} ; -\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$.

21. a) $\overrightarrow{AB} = (-1 ; 1 ; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (0 ; -1 ; 2)$, $\overrightarrow{AD} = (0 ; 0 ; 1)$.

Ta có : $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = 1 \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng. Do đó bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng và

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}.$$

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì $G = \left(\dfrac{2}{3} ; 1 ; 1\right)$.

Gọi G' là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ thì $G' = \left(\dfrac{3}{4} ; 1 ; 1\right)$.

c) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}^2} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

$$S_{ACD} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2}.$$

$$S_{ADB} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

d) Từ công thức tính thể tích khối tứ diện $V = \frac{1}{3}Bh$ (B là diện tích đáy, h là chiều cao tương ứng) ta suy ra $h = \frac{3V}{B}$.

Vậy nếu gọi h_A, h_B, h_C, h_D lần lượt là chiều cao hạ từ đỉnh A, B, C, D thì ta có :

$$h_A = \frac{3V}{S_{BCD}} = \frac{3.\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad h_B = \frac{3V}{S_{ACD}} = \frac{3.\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = 1,$$

$$h_C = \frac{3V}{S_{ABD}} = \frac{3.\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad h_D = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{3.\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{14}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

e) Vì $\overrightarrow{AB} = (-1 ; 1 ; 1)$, $\overrightarrow{CD} = (0 ; 1 ; -1)$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$, suy ra góc giữa AB và CD bằng 90^o.

g) Gọi $I(x ; y ; z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Khi đó, ta có

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y + 2z = 3 \\ -2y + 4z = 3 \\ 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $I\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ và bán kính của mặt cầu đó là

$$R = ID = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{2}.$$

Do đó, phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{35}{4}.$$

22. a) Ta có $\overrightarrow{CA} = (-1\,;-1\,;-1)$, $\overrightarrow{CB} = (-2\,;-1\,;0)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right] = \left(\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & -1\end{vmatrix}\right) = (-1\,;2\,;-1) \neq \vec{0}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ không cùng phương hay A, B, C không thẳng hàng, tức A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Chu vi tam giác ABC bằng $AB + BC + CA = \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{3}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

c) Giả sử $D = (x\,;y\,;z)$, ta có : $\overrightarrow{AB} = (-1\,;0\,;1)$, $\overrightarrow{DC} = (2-x\,;1-y\,;1-z)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases}2-x=-1\\ 1-y=0\\ 1-z=1\end{cases} \Rightarrow D = (3\,;1\,;0)$.

d) Gọi h_A là đường cao của tam giác ABC kẻ từ đỉnh A, ta có :

$$h_A = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

e) $\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} = 0 \Rightarrow \widehat{A} = 90^\circ$ (tam giác ABC vuông tại A).

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|.|\overrightarrow{BC}|} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

$$\cos C = \frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|.|\overrightarrow{CB}|} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

g) Tam giác ABC vuông tại A nên trực tâm H trùng A. Vậy $H = (1 ; 0 ; 0)$.
Ta có thể làm cách khác như sau :

Gọi $H(x ; y ; z)$ là trực tâm của tam giác ABC, ta có hệ

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH} = 0. \end{cases}$$

Ta có : $\overrightarrow{AH} = (x - 1 ; y ; z)$, $\overrightarrow{BC} = (2 ; 1 ; 0)$, $\overrightarrow{BH} = (x ; y ; z - 1)$,

$\overrightarrow{AB} = (-1 ; 0 ; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1 ; 1 ; 1)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-1 ; 2 ; -1)$, $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH} = 1 - x + 2y - z$.

Vậy ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x - 2 + y = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \\ 1 - x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow H = (1 ; 0 ; 0).$$

h) Tam giác ABC vuông tại A nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của cạnh huyền BC. Do đó $I = \left(1 ; \frac{1}{2} ; 1\right)$.

Ta có thể làm cách khác như sau :

Gọi $I(x ; y ; z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Ta có hệ

$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AI} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-1)^2 \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \\ 1 - x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow I = \left(1 ; \frac{1}{2} ; 1\right).$$

23. a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1 ; -3 ; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (-5 ; 5 ; 6)$, $\overrightarrow{BC} = (-6 ; 8 ; 2)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-38 ; -26 ; -10)$.

Vậy $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{38^2 + 26^2 + 10^2} = \sqrt{555}$,

$$h_A = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{2\sqrt{555}}{\sqrt{104}} = \frac{\sqrt{555}}{\sqrt{26}}.$$

b) Gọi D là chân đường phân giác kẻ từ B, giả sử $D = (x ; y ; z)$.

Ta có $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{\sqrt{26}}{\sqrt{104}} = \dfrac{1}{2}$.

Vì D nằm giữa A, C (phân giác trong) nên $\overrightarrow{DA} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ hay

$$\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{DA} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1 - x) = x + 4 \\ 2(2 - y) = y - 7 \\ 2(-1 - z) = z - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{11}{3} \\ z = 1. \end{cases}$$

Vậy $D = \left(-\dfrac{2}{3} ; \dfrac{11}{3} ; 1\right) \Rightarrow BD = \dfrac{2\sqrt{74}}{3}$.

24. Giả sử $\vec{a} = (x_1 ; y_1 ; z_1)$, $\vec{b} = (x_2 ; y_2 ; z_2)$, $\vec{c} = (x_3 ; y_3 ; z_3)$

a) $$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= (y_1z_2 - y_2z_1 ; z_1x_2 - z_2x_1 ; x_1y_2 - x_2y_1)$$

$$= -(y_2z_1 - y_1z_2 ; z_2x_1 - z_1x_2 ; x_2y_1 - x_1y_2)$$

$$= -\left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -\left[\vec{b}, \vec{a}\right].$$

b) Từ câu a) ta có $[\vec{a}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{a}]$, suy ra $[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$.

c) $k\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left(k\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; k\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; k\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$

$= \left(\begin{vmatrix} ky_1 & kz_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} kz_1 & kx_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} kx_1 & ky_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$

$= \left[k\vec{a},\vec{b}\right].$

Tương tự : $k\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left[\vec{a},k\vec{b}\right].$

d) $\left[\vec{c},\vec{a}+\vec{b}\right]$

$= \left(\begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1+y_2 & z_1+z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_1+z_2 & x_1+x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1+x_2 & y_1+y_2 \end{vmatrix}\right)$

$= \left(\begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$

$= \left(\begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right) + \left(\begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$

$= \left[\vec{c},\vec{a}\right] + \left[\vec{c},\vec{b}\right].$

e) $\vec{a}.\left[\vec{b},\vec{c}\right] = x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + y_1\begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix} + z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

$= x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + y_3\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

$= \left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}.$

g) $VP = |\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2 - \left(\vec{a}.\vec{b}\right)^2 = |\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2\cos^2\alpha$

$= |\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2(1-\cos^2\alpha) = |\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2\sin^2\alpha$

$= \left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|^2 = VT$ (ở đây $\alpha = \left(\vec{a},\vec{b}\right)$).

25. Giả sử $D = (0 ; y ; 0)$ thuộc trục Oy. Ta có :

$\overrightarrow{AB} = (1 ; -1 ; 2)$, $\overrightarrow{AD} = (-2 ; y-1 ; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (0 ; -2 ; 4)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (0 ; -4 ; -2)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = -4(y-1) - 2 = -4y + 2.$

Theo giả thiết $V_{ABCD} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\left|-4y + 2\right| = 5$

$$\Leftrightarrow \left|-4y + 2\right| = 30 \Rightarrow y = -7, y = 8.$$

Vậy có hai điểm D trên trục Oy : (0 ; –7 ; 0) và (0 ; 8 ; 0).

26. a) Ta có $\overrightarrow{BA} = (5 ; 0 ; 10)$, $\overrightarrow{CA} = (-3 ; 0 ; 6)$, $\overrightarrow{CB} = (-8 ; 0 ; -4)$.

Do $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 24 - 24 = 0$ nên ABC là tam giác vuông tại C.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}CA.CB = \frac{1}{2}.3\sqrt{5}.4\sqrt{5} = 30.$$

Ta lại có $p = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) = \frac{1}{2}\left(5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}\right) = 6\sqrt{5}.$

Mặt khác $S = p.r$, suy ra $r = \frac{S}{p} = \frac{30}{6\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

b) Ta có $\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right] = \left(\begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}\right) = (0 ; 60 ; 0)$,

$\overrightarrow{BD} = (4 ; 3 ; 5)$

$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BD}\right| = \frac{1}{6}\left|0.4 + 60.3 + 0.5\right| = 30.$

c) Gọi $I(x ; y ; z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Từ điều kiện $IA^2 = IB^2$, $IA^2 = IC^2$, $IA^2 = ID^2$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -10x - 20z + 15 = 0 \\ 6x - 12z + 15 = 0 \\ -2x + 6y - 10z + 35 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{13}{3} \\ z = 1. \end{cases}$$

Vậy mặt cầu cần tìm có tâm $I\left(-\frac{1}{2} ; -\frac{13}{3} ; 1\right)$ và bán kính là

$$R = IC = \sqrt{\left(5 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-1 + \frac{13}{3}\right)^2 + (0 - 1)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{121}{4} + \frac{100}{9} + 1} = \sqrt{\frac{1525}{36}}.$$

Do đó, phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là

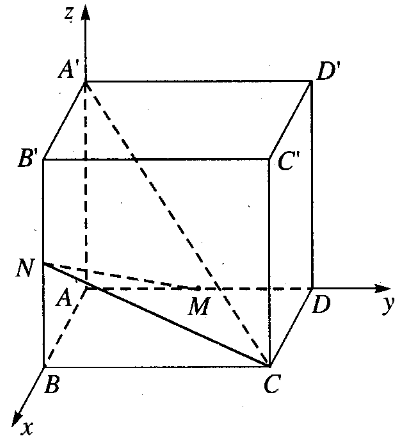
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{13}{3}\right)^2+(z-1)^2=\frac{1525}{36}.$$

27. Thiết lập hệ trục toạ độ như hình vẽ (h.97). Ta có

$A(0 ; 0 ; 0)$; $A'(0 ; 0 ; a)$; $C'(a ; a ; a)$;

$B(a ; 0 ; 0)$; $D'(0 ; a ; a)$; $B'(a ; 0 ; a)$;

$C(a ; a ; 0)$.



Hình 97

a) Ta có : $\overrightarrow{A'C}=(a ; a ; -a)$,

$\overrightarrow{AB'}=(a ; 0 ; a)$, $\overrightarrow{AD'}=(0 ; a ; a)$,

$\Rightarrow \overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AB'}=0$, $\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AD'}=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'C}\perp\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{A'C}\perp\overrightarrow{AD'}$

$\Rightarrow A'C\perp \text{mp}(AB'D')$.

b) Ta lại có $N\left(a;0;\frac{a}{2}\right), M\left(0;\frac{a}{2};0\right)\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\left(a;-\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{A'C}=a^2-\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}=0\Rightarrow MN\perp A'C$.

c) $\overrightarrow{AC'}=(a ; a ; a)$ nên

$$\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC'}\right)=\frac{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC'}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{AC'}\right|}=\frac{a^2-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}}{\sqrt{\frac{3a^2}{2}}.\sqrt{3a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

d) $V_{A'CMN}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{A'N},\overrightarrow{A'M}\right].\overrightarrow{A'C}\right|$.

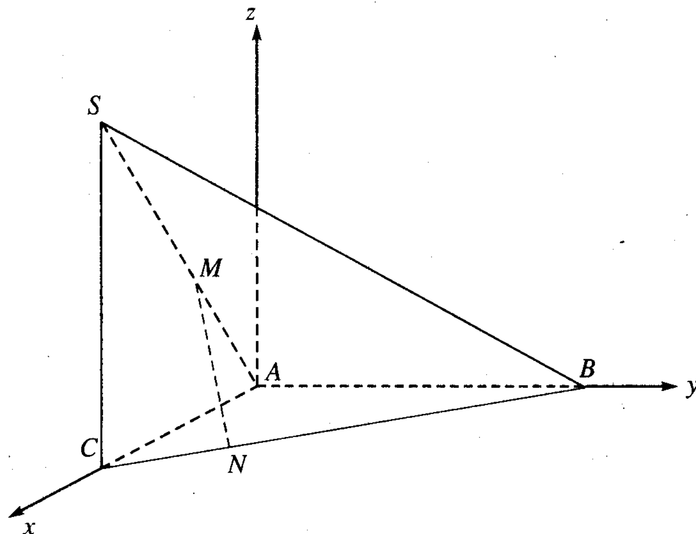
Ta có $\overrightarrow{A'N}=\left(a ; 0 ; -\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{A'M}=\left(0 ; \frac{a}{2} ; -a\right)$.

$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{A'N},\overrightarrow{A'M}\right]=\left(\begin{vmatrix}0 & -\frac{a}{2}\\ \frac{a}{2} & -a\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-\frac{a}{2} & a\\ -a & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & \frac{a}{2}\end{vmatrix}\right)=\left(\frac{a^2}{4} ; a^2 ; \frac{a^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow V_{A'CMN}=\frac{1}{6}\left|\frac{a^3}{4}+a^3-\frac{a^3}{2}\right|=\frac{1}{6}\left|\frac{3a^3}{4}\right|=\frac{a^3}{8}.$$

28. a) Ta chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho gốc toạ độ O trùng A, tia Ox chứa AC, tia Oy chứa AB và tia Oz cùng hướng với tia CS (h.98). Khi đó, ta có :

$A(0 ; 0 ; 0)$, $B\left(0; a\sqrt{2}; 0\right)$, $C\left(a\sqrt{2}; 0; 0\right)$, $S\left(a\sqrt{2}; 0; a\sqrt{2}\right)$,



Hình 98

$$M\left(\frac{t\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{t\sqrt{2}}{2}\right) ; N\left(a\sqrt{2} - \frac{t\sqrt{2}}{2}; \frac{t\sqrt{2}}{2}; 0\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(\sqrt{2}(a-t); \frac{t\sqrt{2}}{2}; -\frac{t\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{2(a^2 - 2at + t^2) + \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2}} = \sqrt{3t^2 - 4at + 2a^2}$$

$$= \sqrt{3\left(t - \frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{2a^2}{3}} \geq \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Dấu = xảy ra khi $t = \dfrac{2a}{3}$ thoả mãn điều kiện $0 < t < 2a$.

Vậy MN ngắn nhất bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ khi $t = \dfrac{2a}{3}$.

b) Khi MN ngắn nhất thì :

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; -\frac{a\sqrt{2}}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SA} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow MN$ là đường vuông góc chung của SA và BC.

29. a) $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=16.$

b) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}.$

c) $x^2+y^2+z^2=30\pm 2\sqrt{29}.$

d) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=41.$

e) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9.$

g) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=1.$

h) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4.$

30. a) Tâm $I(1\ ;\ 3\ ;\ 4)$, bán kính $R=5$.

b) Phương trình đã cho không là phương trình mặt cầu, nó biểu thị một điểm $(-5\ ;\ -2\ ;\ -1)$.

c) Tâm $I\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$, bán kính $R=\frac{1}{2}$.

d) Tâm $I\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{4}\ ;\ -\frac{5}{4}\right)$, bán kính $R=\frac{3\sqrt{6}}{4}$.

e) Không là phương trình mặt cầu.

31. a) Gọi I là tâm mặt cầu. Vì $I\in \text{mp}(Oxy)$ nên $I=(x\ ;\ y\ ;\ 0)$. Theo giả thiết, ta có $AI^2=BI^2=CI^2$, suy ra

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(0+4)^2=(x-1)^2+(y+3)^2+(0-1)^2\\(x-1)^2+(y-2)^2+(0+4)^2=(x-2)^2+(y-2)^2+(0-3)^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}\Rightarrow I=(-2\ ;\ 1\ ;\ 0).$$

Bán kính của mặt cầu là

$$R=AI=\sqrt{(-2-1)^2+(1-2)^2+4^2}=\sqrt{26}.$$

Vậy phương trình mặt cầu là :

$$(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=26.$$

b) Gọi I là tâm mặt cầu, $I\in Oz$ nên $I=(0\ ;\ 0\ ;\ z)$.

Theo giả thiết $AI^2 = BI^2$, ta có phương trình

$$(-3)^2 + 1^2 + (z-2)^2 = (-1)^2 + (-1)^2 + (z+2)^2$$

$$\Rightarrow 8z = 8 \Rightarrow z = 1.$$

Vậy $I = (0 ; 0 ; 1)$ và $AI = \sqrt{11}$.

Phương trình mặt cầu cần tìm là

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 11.$$

c) Phương trình mặt cầu (S) cần tìm có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

Ta có $A \in (S) \Leftrightarrow 2a + 2b + 2c - d = 3,$

$B \in (S) \Leftrightarrow 2a + 4b + 2c - d = 6,$

$C \in (S) \Leftrightarrow 2a + 2b + 4c - d = 6,$

$D \in (S) \Leftrightarrow 4a + 4b + 2c - d = 9.$

Từ đó suy ra $a = \dfrac{3}{2}$, $b = \dfrac{3}{2}$, $c = \dfrac{3}{2}$, $d = 6$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0.$$

32. Trước hết, ta xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu đi qua bốn điểm A, A', B, C. Gọi $I(x ; y ; z)$ là tâm của mặt cầu đó, ta có $IA^2 = IA'^2 = IB^2 = IC^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-a)^2 + y^2 + z^2 = (x-a')^2 + y^2 + z^2 \\ (x-a)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-b)^2 + z^2 \\ (x-a)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-c)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2ax + a^2 = -2a'x + a'^2 \\ -2ax + a^2 = -2by + b^2 \\ -2ax + a^2 = -2cz + c^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{a+a'}{2} \Rightarrow y = \frac{b^2 + aa'}{2b} \text{ và } z = \frac{c^2 + aa'}{2c}.$$

Vậy $I = \left(\dfrac{a+a'}{2} ; \dfrac{b^2 + aa'}{2b} ; \dfrac{c^2 + aa'}{2c}\right)$.

Gọi R là bán kính mặt cầu, ta có

$$R^2 = IB^2 = \left(\frac{a+a'}{2}\right)^2 + \left(\frac{aa'-b^2}{2b}\right)^2 + \left(\frac{c^2+aa'}{2c}\right)^2.$$

Mặt khác $IB'^2 = \left(\frac{a+a'}{2}\right)^2 + \left(\frac{b^2+aa'}{2b} - b'\right)^2 + \left(\frac{c^2+aa'}{2c}\right)^2$

$$= \left(\frac{a+a'}{2}\right)^2 + \left(\frac{b^2-aa'}{2b}\right)^2 + \left(\frac{c^2+aa'}{2c}\right)^2 \text{ (vì } aa' = bb'\text{)}$$

$$= IB^2 = R^2.$$

Tương tự $IC'^2 = IC^2 = R^2$.

Vậy B', C' cũng thuộc mặt cầu nói trên.

b) Gọi G là trọng tâm ΔABC, ta có $\overrightarrow{OG} = \left(\frac{a}{3}\,;\,\frac{b}{3}\,;\,\frac{c}{3}\right)$.

Để chứng minh $OG \perp$ mp$(A'B'C')$, ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{cases} \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{A'B'} = 0 \\ \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{A'C'} = 0. \end{cases}$$

Vì $\overrightarrow{A'B'} = (-a'\,;\,b'\,;\,0)$, $\overrightarrow{A'C'} = (-a'\,;\,0\,;\,c')$

nên $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{A'B'} = -\frac{aa'}{3} + \frac{bb'}{3} + 0 = 0,$

$$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{A'C'} = -\frac{aa'}{3} + 0 + \frac{cc'}{3} = 0 \text{ (đpcm).}$$

33. a) Là mặt cầu $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

b) Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ thì $G = (1\,;\,2\,;\,3)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$ nên

$$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4 \Leftrightarrow 4\left|\overrightarrow{MG}\right| = 4 \Leftrightarrow MG = 1.$$

Vậy tập hợp các điểm $M(x\,;\,y\,;\,z)$ thoả mãn điều kiện đề bài là mặt cầu có phương trình :

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1.$$

c) Là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz + \frac{a^2+b^2+c^2}{2} = 0.$

34. a) Ta có $a = -2m$, $b = 2$, $c = m$, $d = m^2 + 4m$.

Phương trình đã cho là phương trình của một mặt cầu khi

$$a^2 + b^2 + c^2 - d = (-2m)^2 + 2^2 + m^2 - m^2 - 4m > 0$$
$$\Leftrightarrow (2m-1)^2 + 3 > 0 \ \forall m.$$

Vậy phương trình đã cho là phương trình mặt cầu với mọi m. Bán kính mặt cầu là

$$R = \sqrt{(2m-1)^2 + 3} \geq \sqrt{3} \Rightarrow R_{\min} = \sqrt{3} \text{ khi } m = \frac{1}{2}.$$

b) Ta có : $a = \cos\alpha$, $b = -\sin\alpha$, $c = -2$, $d = -(4 + \sin^2\alpha)$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 4 + 4 + \sin^2\alpha$$
$$= 9 + \sin^2\alpha > 0 \ (\forall \alpha).$$

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu với mọi α.

Khi đó $R = \sqrt{9 + \sin^2\alpha}$.

Vì $0 \leq \sin^2\alpha \leq 1$ nên $3 \leq R \leq \sqrt{10}$.

Vậy $R_{\min} = 3$ khi $\alpha = k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$,

$$R_{\max} = \sqrt{10} \text{ khi } \alpha = \frac{\pi}{2} + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

§2. Phương trình mặt phẳng

35. a) Mặt phẳng qua $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và song song với mp(Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}(0 ; 0 ; 1)$ nên có phương trình là $z - z_0 = 0$.

Phương trình mặt phẳng qua $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và song song với mp(Oxz) là :

$$y - y_0 = 0.$$

Phương trình mặt phẳng qua $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và song song với mp(Oyz) là :

$$x - x_0 = 0.$$

b) Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu của điểm M_0 trên các trục Ox, Oy, Oz. Khi đó : $M_1 = (x_0 ; 0 ; 0)$, $M_2 = (0 ; y_0 ; 0)$, $M_3 = (0 ; 0 ; z_0)$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(M_1M_2M_3)$ là :

$$\frac{x}{x_o}+\frac{y}{y_o}+\frac{z}{z_o}=1.$$

c) Gọi (P_x) là mặt phẳng chứa điểm M_o và trục Ox. Khi đó vectơ pháp tuyến của nó là

$$\overrightarrow{n_x}=\left[\overrightarrow{OM_o},\vec{i}\right]=\left(\begin{vmatrix}y_o & z_o\\0 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}z_o & x_o\\0 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x_o & y_o\\1 & 0\end{vmatrix}\right)=(0\ ;z_o\ ;-y_o)$$

Vậy (P_x) có phương trình là $z_oy-y_oz=0$.

Tương tự, phương trình mặt phẳng chứa điểm M_o và trục Oy là

$$z_ox-x_oz=0,$$

phương trình mặt phẳng chứa điểm M_o và trục Oz là

$$y_ox-x_oy=0.$$

36. a) *Cách 1 :* Mặt phẳng cần tìm có vectơ pháp tuyến là :

$$\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].$$

$$\overrightarrow{AB}=(3\ ;-6\ ;0),\ \overrightarrow{AC}=(5\ ;3\ ;3)\Rightarrow\vec{n}=\left(\begin{vmatrix}-6 & 0\\3 & 3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & 3\\3 & 5\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3 & -6\\5 & 3\end{vmatrix}\right)$$
$$=(-18\ ;-9\ ;39).$$

Hiển nhiên $\frac{1}{3}\vec{n}=(-6\ ;-3\ ;13)$ cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm. Vậy mặt phẳng cần tìm đi qua điểm $A(-1\ ;2\ ;3)$ với vectơ pháp tuyến $(-6\ ;-3\ ;13)$ nên có phương trình :

$-6(x+1)-3(y-2)+13(z-3)=0$ hay $-6x-3y+13z-39=0$.

Cách 2 : Mặt phẳng cần tìm có phương trình dạng :

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Vì ba điểm A, B, C nằm trên mặt phẳng đó nên toạ độ của chúng phải thoả mãn phương trình mặt phẳng và ta có hệ :

$$\begin{cases}-A+2B+3C+D=0\\2A-4B+3C+D=0\\4A+5B+6C+D=0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3A + 6B = 0 \\ 2A + 9B + 3C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2B \\ B = -\dfrac{3}{13}C. \end{cases}$$

Suy ra : $A = 2B = -\dfrac{6}{13}C$, $D = A - 2B - 3C = -3C$.

Ta có thể chọn $C = 13$, khi đó $A = -6$, $B = -3$, $D = -39$ và phương trình mặt phẳng cần tìm là

$$-6x - 3y + 13z - 39 = 0.$$

b) Mặt phẳng qua $M_0 = (1 ; 3 ; -2)$, vuông góc với trục Oy nên nó song song với mp(Oxz). Vậy phương trình của nó là $y = 3$ (xem bài 35a).

Ta có thể giải cách khác như sau :

Mặt phẳng cần tìm có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \vec{j} = (0 ; 1 ; 0)$ nên có phương trình :

$$0(x - 1) + 1(y - 3) + 0(z + 2) = 0 \Leftrightarrow y - 3 = 0.$$

c) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm là $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (1 ; -6 ; 4)$, vậy phương trình của nó là

$$1(x - 1) - 6(y - 3) + 4(z + 2) = 0 \text{ hay } x - 6y + 4z + 25 = 0.$$

d) Mặt phẳng cần tìm song song với mặt phẳng $2x - y + 3z + 4 = 0$ nên phương trình có dạng $2x - y + 3z + D = 0$ với $D \neq 4$. Vì $M_0(1 ; 3 ; -2)$ thuộc mặt phẳng đó nên $2.1 - 3 + 3(-2) + D = 0 \Rightarrow D = 7$.

Phương trình mặt phẳng cần tìm là : $2x - y + 3z + 7 = 0$.

Ta cũng có thể giải bằng cách khác như sau : Vì mặt phẳng cần tìm song song với mặt phẳng $2x - y + 3z + 4 = 0$ nên nó có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2 ; -1 ; 3)$. Vậy phương trình của nó là

$$2(x - 1) - 1(y - 3) + 3(z + 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 3z + 7 = 0.$$

e) Vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng cần tìm vuông góc với hai vectơ

$\overrightarrow{AB} = (-1 ; -2 ; 5)$ và $\vec{n'} = (2 ; -1 ; 3)$ ($\vec{n'}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $2x - y + 3z + 4 = 0$).

Vậy ta lấy $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{n'}\right] = \left(\begin{vmatrix}-2 & 5\\-1 & 3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}5 & -1\\3 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & -2\\2 & -1\end{vmatrix}\right) = (-1\ ;\ 13\ ;\ 5).$

Do đó phương trình của nó là :

$-1(x-3) + 13(y-1) + 5(z+1) = 0$ hay $x - 13y - 5z + 5 = 0.$

g) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $2x - y + 3z + 4 = 0$ là $\vec{n'} = (2\ ;\ -1\ ;\ 3).$

Vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng cần tìm là :

$$\vec{n} = \left[\vec{j}, \vec{n'}\right] = \left(\begin{vmatrix}1 & 0\\-1 & 3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & 0\\3 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & 1\\2 & -1\end{vmatrix}\right) = (3\ ;\ 0\ ;\ -2).$$

Vậy phương trình của nó là

$$3x - 2z - 2 = 0.$$

h) Mặt phẳng (α) và (α') có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n_\alpha} = (2\ ;\ 1\ ;\ 2)$, $\overrightarrow{n_{\alpha'}} = (3\ ;\ 2\ ;\ 1).$

Mặt phẳng cần tìm vuông góc với (α) và (α') nên có vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_{\alpha'}}\right] = \left(\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 2\\1 & 3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{vmatrix}\right) = (-3\ ;\ 4\ ;\ 1).$$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là

$-3(x+2) + 4(y-3) + 1(z-1) = 0$ hay $3x - 4y - z + 19 = 0.$

37. a) *Cách 1 :* Ta có $\overrightarrow{AB} = (3\ ;\ -6\ ;\ 0)$, $\overrightarrow{AC} = (5\ ;\ 3\ ;\ 3)$, $\overrightarrow{AD} = (4\ ;\ 0\ ;\ -2)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = (-18).4 + (-9).0 + 39.(-2) = -150 \neq 0.$

Vậy A, B, C, D không thuộc cùng một mặt phẳng.

Cách 2 :

Ta có phương trình mp(ABC) là $-6x - 3y + 13z - 39 = 0.$

Thay toạ độ của điểm $D(3\ ;\ 2\ ;\ 1)$ vào phương trình mặt phẳng đó, ta được :

$$-6.3 - 3.2 + 13.1 - 39 = -50 \neq 0.$$

Điều đó chứng tỏ $D \notin$ mp(ABC) hay bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

b) $a = \dfrac{78}{5}.$

c) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $I = (2 ; 0 ; 1)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (2 ; -2 ; 0)$.

Vậy phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là

$$2(x-2) - 2(y-0) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y - 4 = 0 \text{ hay } x - y - 2 = 0.$$

Thay toạ độ của điểm $C(-1 ; 0 ; 2)$ vào phương trình mặt phẳng đó, ta có :

$$-1 - 0 - 2 = -3 \neq 0.$$

Vậy điểm C không thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

38. a) Giả sử $I = (x ; y ; z)$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = (2 ; 0 ; 2)$, $\overrightarrow{AI} = (x ; y ; z+3)$.

Vì $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương nên có một số k sao cho $\overrightarrow{AI} = \text{k}\overrightarrow{AB}$ hay

$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 0 \\ z + 3 = 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - z - 3 = 0. \end{cases}$$

Mặt khác, $I \in (P)$ nên $3x - 8y + 7z - 1 = 0$. Vậy ta có hệ :

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - z - 3 = 0 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{5} \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow I = \left(\frac{11}{5}; 0; -\frac{4}{5}\right).$$

b) Ta có $AB = 2\sqrt{2}$. Giả sử $C = (x ; y ; z)$.

Ta phải có $\begin{cases} CA = 2\sqrt{2} \\ CB = 2\sqrt{2} \\ C \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 8 \\ (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 8 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 8 \\ x + z + 1 = 0 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ bằng phương pháp thế, ta có hai nghiệm và do đó có hai điểm C :

$$C(2; -2; -3),\ C\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right).$$

39. Mặt phẳng cần tìm đi qua điểm $M_0(1 ; 2 ; 4)$ có phương trình :

$$a(x-1) + b(y-2) + c(z-4) = 0 \qquad (1)$$

hay $ax + by + cz = a + 2b + 4c$ với $a + 2b + 4c \neq 0$ (theo giả thiết).

Từ đó, ta xác định được toạ độ các giao điểm A, B, C là :

$$A = \left(\frac{a+2b+4c}{a}\,;0\,;0\right);\qquad B = \left(0;\frac{a+2b+4c}{b}\,;0\right),$$

$$C = \left(0\,;0\,;\frac{a+2b+4c}{c}\right).$$

Vì $OA = OB = OC$ nên $OA^2 = OB^2 = OC^2$, do đó ta có :

$$\frac{(a+2b+4c)^2}{a^2} = \frac{(a+2b+4c)^2}{b^2} = \frac{(a+2b+4c)^2}{c^2}$$

hay $a^2 = b^2 = c^2$. Có những trường hợp sau xảy ra :

+ Nếu a, b, c cùng dấu thì $a = b = c$ và phương trình (1) trở thành

$$x + y + z - 7 = 0.$$

+ Nếu a, b cùng dấu và khác dấu với c thì $a = b = -c$. Phương trình (1) trở thành

$$x + y - z + 1 = 0.$$

+ Nếu a, c cùng dấu và khác dấu với b thì $a = c = -b$. Phương trình (1) trở thành

$$x - y + z - 3 = 0.$$

+ Nếu b, c cùng dấu và khác dấu với a thì $-a = b = c$. Phương trình (1) trở thành

$$-x + y + z - 5 = 0.$$

40. Giả sử $A = (a\,;0\,;0)$, $B = (0\,;b\,;0)$, $C = (0\,;0\,;c)$ với $a, b, c > 0$ và (P) là mặt phẳng phải tìm. Phương trình của (P) là :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Vì $M_0 \in (P)$ nên $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$

Thể tích của tứ diện $OABC$ là : $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc.$

Theo bất đẳng thức Cô-si :

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \Leftrightarrow abc \geq 27$$

$$\Rightarrow V_{OABC} \geq \frac{27}{6} = \frac{9}{2},$$ dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 3$.

Vậy V_{OABC} nhỏ nhất bằng $\frac{9}{2}$ khi $a = b = c = 3$, khi đó phương trình mặt phẳng (P) là $x + y + z - 3 = 0$.

41. a) Hai mặt phẳng trùng nhau.

b) Hai mặt phẳng song song.

c), d), e) : Hai mặt phẳng cắt nhau.

42. a) $\left[\begin{array}{l}\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \alpha = \dfrac{\pi}{12} + m\pi \\ \alpha = \dfrac{5\pi}{12} + n\pi\end{array}\right.$ $\quad k, m, n \in \mathbb{Z}$.

b) $\left[\begin{array}{l}\alpha = k\pi \\ \alpha = \pm\dfrac{\pi}{3} + l\pi\end{array}\right.$ $\quad k, l \in \mathbb{Z}$.

c) Hai mặt phẳng song song với nhau $\Leftrightarrow \dfrac{2}{m+3} = \dfrac{m}{2} = \dfrac{3}{5m+1} \neq \dfrac{-6+m}{-10}$. (*)

Ta có $\begin{cases}\dfrac{2}{m+3} = \dfrac{m}{2} \\ \dfrac{m}{2} = \dfrac{3}{5m+1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 + 3m - 4 = 0 \\ 5m^2 + m - 6 = 0\end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$

Nhưng với $m = 1$ ta có $\dfrac{m}{2} = \dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{-6+m}{-10} = \dfrac{1}{2}$, tức là điều kiện (*) không thoả mãn. Vậy không có giá trị nào của m để hai mặt phẳng song song.

Từ đó suy ra : hai mặt phẳng trùng nhau $\Leftrightarrow m = 1$;

hai mặt phẳng cắt nhau $\Leftrightarrow m \neq 1$.

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi : $2(m+3) + m.2 + 3(5m+1) = 0$

$$\Leftrightarrow 19m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{19}.$$

43. a) Gọi $M(x ; y ; z)$ là điểm thuộc giao tuyến Δ của hai mặt phẳng, khi đó toạ độ của M là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases}x - y + z = 4 \\ 3x - y + z = 1.\end{cases}$$

Đây là hệ ba ẩn có hai phương trình. Ta tìm hai nghiệm nào đó của hệ.

Cho $z = 0$, ta có $\begin{cases}x - y = 4 \\ 3x - y = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = -\dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{11}{2}.\end{cases}$

Vậy $M_1\left(-\frac{3}{2};\ -\frac{11}{2};0\right) \in \Delta$.

Cho $y = 0$, ta có $\begin{cases} x + z = 4 \\ 3x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ z = \dfrac{11}{2}. \end{cases}$

Vậy $M_2\left(-\frac{3}{2};0;\frac{11}{2}\right) \in \Delta$.

Mặt phẳng phải tìm chính là mặt phẳng đi qua M_o, M_1, M_2.

Viết phương trình mặt phẳng qua ba điểm trên, ta có kết quả :

$$15x - 7y + 7z - 16 = 0.$$

b) *Cách 1 :* Ta thấy hệ phương trình

$$\begin{cases} y + 2z - 4 = 0 \\ x + y - z + 3 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

có một nghiệm duy nhất $\left(\frac{1}{2};\ -1;\ \frac{5}{2}\right)$.

Điều này có nghĩa là giao tuyến của hai mặt phẳng

$$y + 2z - 4 = 0 \quad \text{và} \quad x + y - z + 3 = 0$$

cắt mặt phẳng $x + y + z - 2 = 0$.

Vậy không tồn tại mặt phẳng thoả mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2 : Ta tìm hai điểm thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng.

Cho $z = 0$, ta được $M_1 = (-7 ; 4 ; 0)$. Cho $y = 0$, ta được $M_2 = (-1 ; 0 ; 2)$.

Gọi (α) là mặt phẳng song song với mặt phẳng $x + y + z - 2 = 0$ thì (α) có dạng :

$$x + y + z + D = 0, D \neq -2.$$

Ta xác định D để $M_1, M_2 \in (\alpha)$. D là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} -7 + 4 + D = 0 \\ -1 + 2 + D = 0. \end{cases}$$

Hệ vô nghiệm. Vậy không tồn tại mặt phẳng thoả mãn yêu cầu bài toán.

c) Ta tìm hai điểm M_1, M_2 thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng.

Gọi $\overrightarrow{n'} = (2 ; 0 ; -1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $2x - z + 7 = 0$.

Khi đó mặt phẳng cần tìm là mặt phẳng đi qua M_1 và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{n'}\right]$.

Sau các tính toán, ta có kết quả : Mặt phẳng cần tìm có phương trình :

$$x - 22y + 2z + 21 = 0.$$

44. Để ba mặt phẳng đã cho cùng đi qua một đường thẳng, điều kiện cần và đủ là mặt phẳng $5x + ky + 4z + m = 0$ phải chứa hai điểm phân biệt của đường thẳng Δ với Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng còn lại.

Ta tìm hai điểm nào đó của Δ.

Cho $y = 0$, ta có $\begin{cases} 3x + z = 3 \\ x - 2z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{7} \\ z = \dfrac{18}{7} \end{cases} \Rightarrow M_1\left(\dfrac{1}{7}; 0; \dfrac{18}{7}\right) \in \Delta.$

Cho $z = 0$, ta có $\begin{cases} 3x - 7y = 3 \\ x - 9y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{31}{10} \\ y = \dfrac{9}{10} \end{cases} \Rightarrow M_2\left(\dfrac{31}{10}; \dfrac{9}{10}; 0\right) \in \Delta.$

Thay toạ độ điểm M_1, M_2 vào phương trình mặt phẳng $5x + ky + 4z + m = 0$, ta được hệ

$$\begin{cases} \dfrac{5}{7} + \dfrac{72}{7} + m = 0 \\ \dfrac{155}{10} + \dfrac{9k}{10} + m = 0 \end{cases} \Rightarrow k = -5, m = -11.$$

45. Vectơ pháp tuyến của ba mặt phẳng (P), (Q), (R) lần lượt là :

$$\overrightarrow{n_P} = (1 ; 1 ; 1), \overrightarrow{n_Q} = (m ; -2 ; 1), \overrightarrow{n_R} = (m ; m - 1 ; -1).$$

Ba mặt phẳng đôi một vuông góc khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} m - 2 + 1 = 0 \\ m + m - 1 - 1 = 0 \\ m^2 - 2m + 2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 1 \\ (m - 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Gọi $I(x ; y ; z)$ là giao điểm chung của cả ba mặt phẳng. Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y + z - 6 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow I = (1 ; 2 ; 3).$$

46. a) Dễ thấy điểm $M_0(4 ; 3 ; 0)$ thuộc mặt cầu và điểm $I(3 ; 1 ; -2)$ là tâm mặt cầu. Do đó, mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M_0 là mặt phẳng đi qua M_0 với vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IM_0}$, nó có phương trình :

$$1.(x-4)+2(y-3)+2(z-0)=0 \text{ hay } x+2y+2z-10=0.$$

b) Bán kính R của mặt cầu phải tìm bằng khoảng cách từ tâm $I(-2 ; 1 ; 1)$ tới mặt phẳng (α) nên $R=\dfrac{|-2+2-2+5|}{\sqrt{1+4+4}}=1$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$.

c) Ta có $\overrightarrow{BC}=(-3 ; 0 ; 1)$, $\overrightarrow{BD}=(-4 ; -1 ; 2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right]=(1 ; 2 ; 3)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (BCD) là :

$$1.(x-3)+2(y-2)+3(z-0)=0 \text{ hay } x+2y+3z-7=0.$$

Gọi R là bán kính mặt cầu phải tìm, ta có

$$R=d(A,(BCD))=\frac{|3+2(-2)+3(-2)-7|}{\sqrt{1+4+9}}=\sqrt{14}.$$

Vậy phương trình mặt cầu là :

$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=14.$$

d) Phương trình mặt cầu (S) phải tìm có dạng

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0.$$

Ta có $A \in (S) \Rightarrow 1-2a+d=0;$

$B \in (S) \Rightarrow 1-2b+d=0,$

$C \in (S) \Rightarrow 1-2c+d=0.$

Đồng thời tâm $I(a ; b ; c)$ của mặt cầu thuộc mặt phẳng $x+y+z-3=0$ nên $a+b+c-3=0$.

Giải hệ $\begin{cases}1-2a+d=0\\1-2b+d=0\\1-2c+d=0\\a+b+c-3=0\end{cases} \Rightarrow a=b=c=d=1.$

Vậy phương trình mặt cầu là

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+1=0.$$

47. a) Mặt phẳng (P) chứa Oz nên có dạng $Ax + By = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_P} = (A\ ;\ B\ ;\ 0)$.

Ta có $\overrightarrow{n_\alpha} = (2\ ;\ 1\ ;\ -\sqrt{5})$. Theo giả thiết của bài toán :

$$\left|\cos\left(\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_\alpha}\right)\right| = \frac{|2A + B|}{\sqrt{A^2 + B^2}.\sqrt{4 + 1 + 5}} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2|2A + B| = \sqrt{10}.\sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\Leftrightarrow 6A^2 + 16AB - 6B^2 = 0.$$

Lấy $B = 1$ ta có

$$6A^2 + 16A - 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A_1 = \dfrac{1}{3} \\ A_2 = -3. \end{array}\right.$$

Vậy có hai mặt phẳng (P) :

$$\frac{1}{3}x + y = 0\ ; \qquad -3x + y = 0.$$

b) Mặt phẳng (Q) đi qua A, C và tạo với mp(Oxy) góc 60° nên (Q) cắt Oy tại điểm $B(0\ ;\ b\ ;\ 0)$ khác gốc $O \Rightarrow b \neq 0$.

Khi đó phương trình của mặt phẳng (Q) là :

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{b} + \frac{z}{1} = 1 \text{ hay } bx + 3y + 3bz - 3b = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = (b\ ;\ 3\ ;\ 3b).$$

Mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}\,(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$. Theo giả thiết, ta có

$$\left|\cos\left(\overrightarrow{n_Q}, \vec{k}\right)\right| = \cos 60^\circ \Leftrightarrow \frac{|3b|}{\sqrt{b^2 + 9 + 9b^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |6b| = \sqrt{10b^2 + 9} \Leftrightarrow b^2 = \frac{9}{26} \Leftrightarrow b = \pm\frac{3}{\sqrt{26}}.$$

Vậy có hai mặt phẳng (Q) :

$$x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0,$$
$$x + \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0.$$

48. a) $M \in Oy \Leftrightarrow M = (0\ ;\ y_o\ ;\ 0)$. Vậy :

$$d(M\ ;\ (\alpha)) = \frac{|y_o + 1|}{\sqrt{3}},\ d(M, (\alpha')) = \frac{|-y_o - 5|}{\sqrt{3}}.$$

Ta có $d(M, (\alpha)) = d(M, (\alpha')) \Leftrightarrow |y_o + 1| = |y_o + 5| \Leftrightarrow y_o = -3$.

Vậy điểm phải tìm là $M(0 ; -3 ; 0)$.

b) Phương trình mặt phẳng (ABC) là : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$$\Rightarrow d(O ; (ABC)) = \frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}.$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}$

và $3 = a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$,

Suy ra : $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \geq \sqrt{3}$.

Từ đó suy ra : $d(O ; (ABC)) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dấu = xảy ra khi $a^2 = b^2 = c^2 = 1$ hay $a = b = c = 1$.

Vậy $d(O ; (ABC))$ lớn nhất bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$ khi $a = b = c = 1$.

49. (h.99) a) Từ giả thiết ta có $C = (a ; a ; 0)$,

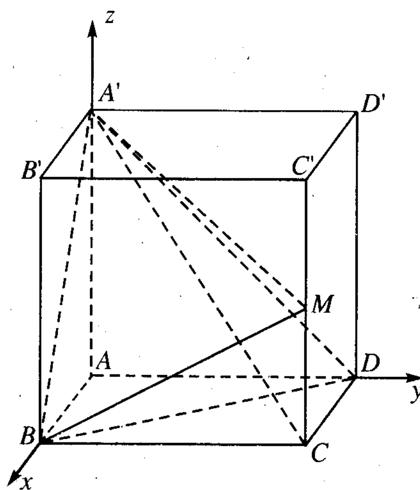
$C' = (a ; a ; b) \Rightarrow M = \left(a; a; \frac{b}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{BD} = (-a ; a ; 0)$;

$\overrightarrow{BM} = \left(0; a; \frac{b}{2}\right)$; $\overrightarrow{BA'} = (-a ; 0 ; b)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}\right] = \left(\frac{ab}{2} ; \frac{ab}{2} ; -a^2\right)$.

Vậy $V_{BDA'M} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}\right].\overrightarrow{BA'}\right| = \frac{a^2b}{4}$.



Hình 99

b) Mặt phẳng $(A'BD)$ có vectơ pháp tuyến

$\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BA'}\right] = (ab ; ab ; a^2)$.

Mặt phẳng (MBD) có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}\right] = \left(\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2\right).$$

Vì vậy $(MBD) \perp (A'BD) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{2} - a^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 = a^4 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1.$$

(do $a > 0$, $b > 0$)

50. a) Giả sử $A \neq 0$, khi đó mặt phẳng thứ nhất cắt trục Ox tại điểm M_o, $M_o = \left(-\frac{D}{A}; 0; 0\right)$. Khoảng cách từ M_o tới mặt phẳng thứ hai chính là khoảng cách d giữa hai mặt phẳng.

Vậy $d = \dfrac{\left|-A.\dfrac{D}{A} + E\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \dfrac{|E - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

b) Mặt phẳng (α) song song với hai mặt phẳng đã cho có phương trình

$$Ax + By + Cz + F = 0 \ (F \neq D, F \neq E).$$

Để (α) cách đều cả hai mặt phẳng đã cho thì :

$$\frac{|F - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|F - E|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

$$\Leftrightarrow |F - D| = |F - E| \Leftrightarrow F - D = \pm(F - E).$$

Vì $D \neq E$, nên ta phải có $F - D = -F + E \Rightarrow F = \dfrac{D + E}{2}$. Vậy phương trình mặt phẳng (α) là :

$$Ax + By + Cz + \frac{D + E}{2} = 0.$$

51. Một mặt phẳng muốn cách đều hai điểm M, N thì hoặc nó đi qua trung điểm của MN hoặc nó song song với MN. Vì vậy, để mặt phẳng (α) cách đều bốn đỉnh A, B, C, D của hình tứ diện thì :

– Hoặc mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của ba cạnh cùng xuất phát từ một đỉnh của tứ diện. Có bốn mặt phẳng như vậy.

– Hoặc mp(α) chứa hai đường trung bình của tứ diện. Có ba mặt phẳng như vậy.

Tóm lại, ta có bảy mặt phẳng thoả mãn yêu cầu của đề bài là

$x - z - 6 = 0$; $x + y - 10 = 0$; $x + 2y - z - 8 = 0$; $2x + y - z - 14 = 0$;

$x - y - z - 2 = 0$; $2x + y + z - 16 = 0$; $5x + y - 2z - 28 = 0$.

52. a) Đường thẳng M_1M_2 cắt (α) khi và chỉ khi $\overrightarrow{M_1M_2}$ không vuông góc với $\vec{n}(A\,;B\,;C)$ ($\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của (α)), tức là :

$$\overrightarrow{M_1M_2}.\vec{n} \neq 0 \Leftrightarrow A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D.$$

b) Đoạn thẳng M_1M_2 cắt (α) khi và chỉ khi có một điểm I thuộc (α) và chia đoạn thẳng M_1M_2 theo một tỉ số $k < 0$. Gọi $(x_o\,;y_o\,;z_o)$ là toạ độ của điểm I, ta có :

$$x_o = \frac{x_1 - kx_2}{1-k},\ y_o = \frac{y_1 - ky_2}{1-k},\ z_o = \frac{z_1 - kz_2}{1-k}$$

và $Ax_o + By_o + Cz_o + D = 0$

$$\Rightarrow A\left(\frac{x_1 - kx_2}{1-k}\right) + B\left(\frac{y_1 - ky_2}{1-k}\right) + C\left(\frac{z_1 - kz_2}{1-k}\right) + D = 0$$

$$\Leftrightarrow (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) = k(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D). \qquad (*)$$

Vì $k < 0$ nên điều kiện trên tương đương với điều kiện

$$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) < 0.$$

c) M_1 nằm giữa I và $M_2 \Leftrightarrow I$ chia đoạn M_1M_2 theo tỉ số k mà $0 < k < 1$. Ta vẫn có điều kiện (*), nhưng vì $0 < k < 1$ nên điều kiện đó tương đương với điều kiện :

$$0 < \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D} < 1.$$

d) Tương tự như trên, ta có điều kiện :

$$0 < \frac{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D}{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D} < 1.$$

Chú ý : Từ kết quả trên ta suy ra kết luận sau :

Hai điểm $M_1(x_1\,;y_1\,;z_1)$ và $M_2(x_2\,;y_2\,;z_2)$ nằm cùng một phía đối với mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$ khi và chỉ khi

$$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) > 0.$$

53. (h.100) Ta chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho gốc toạ độ là tâm O của đáy, tia Ox chứa OA, tia Oy chứa OB, tia Oz chứa OS.

Khi đó : $A = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$,

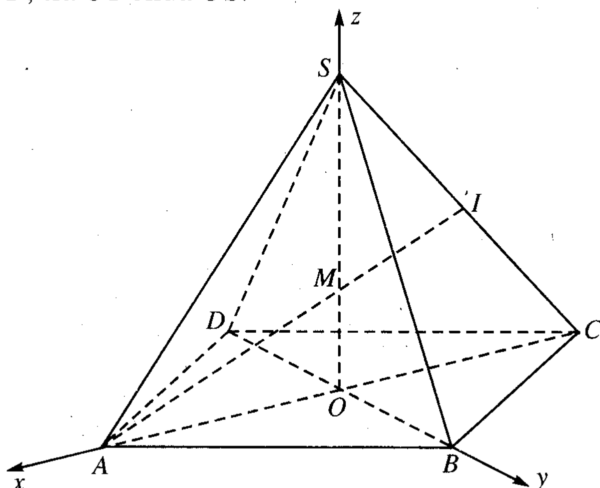
$B = \left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$,

$C = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$,

$S = (0 ; 0 ; h)$.

Rõ ràng giao điểm M của SO và AI chính là trọng tâm tam giác SAC nên

$M = \left(0;0;\frac{h}{3}\right)$.



Hình 100

Mặt phẳng (ABI) cũng chính là mặt phẳng (ABM). Vậy mp(ABI) có phương trình là :

$$\frac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + \frac{y}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + \frac{z}{\frac{h}{3}} = 1.$$

Do đó, khoảng cách từ S tới mặt phẳng (ABI) là :

$$d = \frac{\left|\frac{h}{\frac{h}{3}} - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\frac{h}{3}}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{2}{a^2} + \frac{9}{h^2}}} \Rightarrow d = \frac{2ah}{\sqrt{4h^2 + 9a^2}}.$$

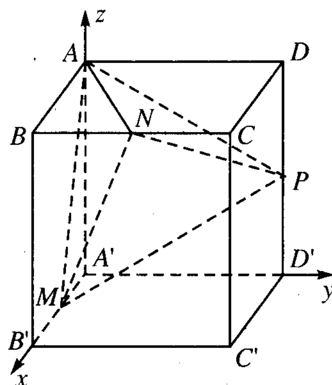
54. (h.101) a) Ta chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho gốc O là đỉnh A' của hình lập phương, tia Ox chứa $A'B'$, tia Oy chứa $A'D'$ và tia Oz chứa $A'A$. Khi đó

$A' = (0 ; 0 ; 0)$, $B' = (1 ; 0 ; 0)$,

$D' = (0 ; 1 ; 0)$, $A = (0 ; 0 ; 1)$

$C = (1 ; 1 ; 1)$, $B = (1 ; 0 ; 1)$,

$D = (0 ; 1 ; 1)$, $C' = (1 ; 1 ; 0)$.



Hình 101

Từ đó :

$$\overrightarrow{AC'} = (1\ ;\ 1\ ;\ -1),\ \overrightarrow{A'B} = (1\ ;\ 0\ ;\ 1)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{A'B} = 0 \Rightarrow AC' \perp A'B.$$

b) Ta có $M = \left(\frac{1}{2};\ 0;\ 0\right),\ N = \left(1;\ \frac{1}{2};\ 1\right),\ P = \left(0;\ 1;\ \frac{1}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 1\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC'} = 0 \Rightarrow MN \perp AC'.$$

$$\overrightarrow{MP} = \left(-\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{AC'} = 0 \Rightarrow MP \perp AC'.$$

Vậy $AC' \perp$ mp(MNP).

c) Ta có : $\overrightarrow{MA} = \left(-\frac{1}{2};0;1\right)$,

$$\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right] = \left(\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ 1 & \frac{1}{2}\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}\right) = \left(-\frac{3}{4};-\frac{3}{4}\ ;\ \frac{3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow V_{AMNP} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MA}\right| = \frac{1}{6}\left|\frac{9}{8}\right| = \frac{3}{16}.$$

§3. Phương trình đường thẳng

55. a) $d : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 5 - 3t \\ z = 1 - 4t. \end{cases}$

b) $d : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 3t. \end{cases}$

56. a) $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -4 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+4}{3}.$

b) $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{2}.$

57. a) *Cách 1.* Điểm $M(x; y; z) \in d$ khi toạ độ của M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x + y - z + 4 = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $y = t$, ta có $\begin{cases} x + z = 3t \\ x - z = -4 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + t \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$

Vậy phương trình tham số của d là :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = t \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$$

Cách 2. Ta tìm một điểm thuộc đường thẳng d bằng cách cho $y = 0$ trong hệ (*).

Ta có hệ $\begin{cases} x + z = 0 \\ x - z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ z = 2. \end{cases}$

Vậy điểm $M_0(-2 ; 0 ; 2)$ thuộc đường thẳng d.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng d là

$$\vec{u} = \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2 ; 2 ; 4).$$

Vậy phương trình tham số của d là :

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2t \\ z = 2 + 4t. \end{cases}$$

b) $d : \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + 2t \\ z = t. \end{cases}$

58. Giả sử M là một điểm bất kì. Khi đó :

M thuộc đường thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R}$;

M thuộc tia $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ t \in [0,\infty)$;

M thuộc đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}, t \in [0,1]$.

Từ đó suy ra phương trình tham số của đường thẳng AB là

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 4t \\ z = -1 + 8t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} ;$$

phương trình tham số của tia AB là

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 4t \\ z = -1 + 8t \end{cases} \quad t \in [0, \infty) \ ;$$

phương trình tham số của đoạn thẳng AB là

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 4t \\ z = -1 + 8t \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

59. a) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = -1 + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{5}.$

b) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 + t. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - 5t \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{-5}.$

d) $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z-1}{2}.$

e) Vectơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là :

$$\vec{u} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (4 \ ; -7 \ ; -3).$$

Vậy phương trình đường thẳng là $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 7t \\ z = -1 - 3t. \end{cases}$

g) Vectơ chỉ phương của đường thẳng là $\vec{u} = \overrightarrow{n_\alpha} = (1 \ ; 2 \ ; -2)$.

Vậy phương trình là : $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2t. \end{cases}$

h) Vectơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là

$$\vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (-4\ ;\ -2\ ;\ 1).$$

Vậy phương trình của nó là : $\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 + t. \end{cases}$

60. Ta có thể viết phương trình đường thẳng d dưới dạng

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct. \end{cases}$$

Mỗi điểm $M(x; y; z) \in d$ có hình chiếu trên mp(Oxy) là điểm $M'(x; y; 0) \in d'$ với d' là hình chiếu của d trên mp(Oxy).

Vậy d' có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = 0. \end{cases}$$

Tương tự, ta có phương trình hình chiếu của d trên mp(Oxz), mp(Oyz) lần lượt là :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = 0 \\ z = z_0 + ct \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct. \end{cases}$$

61. a) Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng toạ độ (Oxy) là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 0. \end{cases}$$

* Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mp(Oxz) là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

* Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mp(Oyz) là

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

* Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mp(α) là giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (β), trong đó (β) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với (α).

Vectơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{u_d} = (2 ; 3 ; 1)$, vectơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha} = (1 ; 1 ; 1)$. Vậy vectơ pháp tuyến của (β) là :

$$\overrightarrow{n_\beta} = \left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_\alpha}\right] = \left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2 ; -1 ; -1).$$

Điểm $M_0(1 ; -2 ; 3)$ thuộc d và cũng thuộc (β), do đó phương trình mặt phẳng (β) là $2(x - 1) - 1(y + 2) - 1(z - 3) = 0$ hay

$$2x - y - z - 1 = 0.$$

Vậy hình chiếu của d trên mp(α) là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) có phương trình lần lượt là $x + y + z - 7 = 0$ và $2x - y - z - 1 = 0$. Suy ra phương trình tham số của nó là

$$\begin{cases} x = \dfrac{8}{3} \\ y = \dfrac{13}{3} - t \\ z = t. \end{cases}$$

b) Gọi (β) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với (α) thì

$$(\beta) : 2x + y + 2z - 7 = 0.$$

Khi đó hình chiếu của đường thẳng d trên mp(α) là giao tuyến của mp(α) : $x + 2y - 2z - 2 = 0$ và mp(β) : $2x + y + 2z - 7 = 0$.

Từ đó suy ra phương trình đường thẳng d là

$$\frac{x - 4}{2} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z}{-1}.$$

62. a) Đường thẳng d đi qua $M_0(1 ; 7 ; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2 ; 1 ; 4)$.

Đường thẳng d' đi qua $M_0'(6 ; -1 ; -2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u'}(3 ; -2 ; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{M_0M_0'} = (5 ; -8 ; -5)$, $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = (9 ; 10 ; -7) \neq \vec{0}$,

suy ra $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right] . \overrightarrow{M_0M_0'} = 0$. Vậy d và d' cắt nhau.

b) d, d' chéo nhau.

c) d, d' song song.

d) d, d' song song.

e) d, d' trùng nhau.

63. a) Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(12 ; 9 ; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(4 ; 3 ; 1)$. Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3 ; 5 ; -1)$.

Vì $\vec{u}.\vec{n} = 26 \neq 0$ nên d cắt (α).

b) d song song với (α).

c) d nằm trong (α).

d) d cắt (α).

e) d cắt (α).

64. a) Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(1 ; 2 ; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(1 ; 2 ; -2)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(2 ; 2 ; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(2 ; 4 ; -4)$.

Rõ ràng $\overrightarrow{u_2} = 2\overrightarrow{u_1}$ nên d_1, d_2 cùng nằm trên một mặt phẳng, ta gọi là mp(α).

Ta có vectơ pháp tuyến của mp(α) là $\overrightarrow{n_\alpha} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{M_1M_2}\right] = (0 ; -2 ; -2)$. Vậy phương trình mặt phẳng (α) là : $0(x-1) - 2(y-2) - 2(z-0) = 0$ hay

$$(\alpha) : y + z - 2 = 0.$$

b) Gọi A là giao điểm của đường thẳng d_3 và mp(α). Toạ độ của A thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $A = \left(1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$.

Gọi B là giao điểm của đường thẳng d_4 và mp(α). Tương tự như trên, ta có $B = (4\,;\,2\,;\,0)$.

Đường thẳng AB nằm trong (α) cắt cả d_3 và d_4. Mặt khác $\overrightarrow{AB} = \left(3\,;\frac{3}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$ không cùng phương với $\overrightarrow{u_1}\,(1\,;\,2\,;\,-2)$. Do đó AB cắt cả d_1 và d_2. Vậy AB chính là đường thẳng d cần tìm.

$$d : \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}.$$

65. a) Điểm $M(x\,;\,y\,;\,z)$ cách đều ba điểm A, B, C khi và chỉ khi

$$\begin{cases} MA^2 = MB^2 \\ MA^2 = MC^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y - 2z - 2 = 0 \\ 2x - 8y + 2z - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \quad (1) \\ x - 4y + z - 7 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm $M(x;\,y;\,z)$ là đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng lần lượt có phương trình (1) và (2). Đường thẳng đó có phương trình là

$$\begin{cases} x = -8 - 3t \\ y = t \\ z = 15 + 7t \end{cases}$$

Nó chính là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Xét điểm $M(x\,;\,y\,;\,z)$. Khi đó khoảng cách d_x từ M tới trục Ox là

$$d_x = \frac{\left|\left[\overrightarrow{OM}, \vec{i}\right]\right|}{\left|\vec{i}\right|} = \sqrt{y^2 + z^2},$$

khoảng cách d_y từ M tới trục Oy là

$$d_y = \frac{\left|\left[\overrightarrow{OM}, \vec{j}\right]\right|}{\left|\vec{j}\right|} = \sqrt{x^2 + z^2}.$$

Mặt khác $MA = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2}$.

Vậy M là một điểm của quỹ tích khi

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = x^2 + z^2 \\ y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 & (1) \\ x^2 - 2(x + y) + 2 = 0. & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $x = y$ hoặc $x = -y$.

Khi $x = y$, phương trình (2) có dạng : $x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$.

Trong trường hợp này, quỹ tích M là những điểm $(x; y; z)$ mà :

$$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ y = 2 + \sqrt{2} \\ z = t \end{cases} \quad (3) \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = 2 - \sqrt{2} \\ y = 2 - \sqrt{2} \\ z = t. \end{cases} \quad (4)$$

Khi $x = -y$, phương trình (2) trở thành : $x^2 + 2 = 0$. Điều này không xảy ra.

Vậy quỹ tích cần tìm là hai đường thẳng có phương trình (3) và (4).

66. a) Giải hệ gồm phương trình các mặt phẳng xác định Δ và Δ', ta có một nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Vậy Δ và Δ' cắt nhau tại điểm $I\left(-\dfrac{1}{2} ; 0 ; \dfrac{3}{2}\right)$.

b) Ta chọn một điểm thuộc Δ, có thể lấy $A = (0 ; -1 ; 0) \in \Delta$.

Chọn một điểm thuộc Δ', có thể lấy $B = (0 ; 1 ; 4) \in \Delta'$.

Khi đó, vectơ chỉ phương đơn vị của Δ là $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{\overrightarrow{IA}}{|\overrightarrow{IA}|}$,

vectơ chỉ phương đơn vị của Δ' là $\overrightarrow{e_2} = \dfrac{\overrightarrow{IB}}{|\overrightarrow{IB}|}$.

Suy ra

$$\overrightarrow{e_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}};\frac{-2}{\sqrt{14}};\frac{-3}{\sqrt{14}}\right),$$

$$\overrightarrow{e_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{30}};\frac{2}{\sqrt{30}};\frac{5}{\sqrt{30}}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ là các vectơ chỉ phương của cặp đường phân giác của các góc tạo bởi Δ và Δ'.

Vậy phương trình chính tắc của cặp đường phân giác là :

$$\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{14}}+\frac{1}{\sqrt{30}}}=\frac{y}{\frac{-2}{\sqrt{14}}+\frac{2}{\sqrt{30}}}=\frac{z-\frac{3}{2}}{\frac{-3}{\sqrt{14}}+\frac{5}{\sqrt{30}}}$$

và

$$\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{14}}-\frac{1}{\sqrt{30}}}=\frac{y}{\frac{-2}{\sqrt{14}}-\frac{2}{\sqrt{30}}}=\frac{z-\frac{3}{2}}{\frac{-3}{\sqrt{14}}-\frac{5}{\sqrt{30}}}.$$

67. a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(-2 ; 1 ; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}\,(1 ; 2 ; -2)$.

Ta có $\overrightarrow{M_0M} = (-4 ; -2 ; -2) \Rightarrow \left[\vec{u}, \overrightarrow{M_0M}\right] = (-8 ; 10 ; 6)$

$$\Rightarrow d(M_0, d) = \frac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{M_0M}\right]\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{(-8)^2+10^2+6^2}}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{\sqrt{200}}{3} = \frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

b) Ta xác định được một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (4 ; -2 ; 1)$.

Mặt phẳng (α) đi qua $M_0(2 ; 3 ; -1)$ và vuông góc với d có phương trình

$$4(x-2)-2(y-3)+1(z+1)=0$$

hay

$$4x-2y+z-1=0.$$

Gọi H là giao điểm của d và (α). Toạ độ điểm H là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases}4x-2y+z-1=0\\ x+y-2z-1=0\\ x+3y+2z+2=0\end{cases} \Rightarrow H=\left(\frac{3}{14}; -\frac{5}{14}; -\frac{8}{14}\right).$$

Khi đó

$$d(M_0, d) = M_0H = \sqrt{\left(2-\frac{3}{14}\right)^2+\left(3+\frac{5}{14}\right)^2+\left(-1+\frac{8}{14}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2870}{14^2}} = \sqrt{\frac{205}{14}}.$$

c) $d(M_o, d) = \dfrac{\sqrt{9022}}{26}$.

d) $d(M_o, d) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

68. Vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = (1 ; 1 ; 3)$, vectơ pháp tuyến của mp(α) là $\vec{n} = (2 ; 1 ; -1)$.

Vì $\vec{n}.\vec{u} = 0$ nên $\vec{n} \perp \vec{u}$. Dễ thấy $M \notin (\alpha)$. Do đó $d // (\alpha)$.

Khoảng cách từ M tới (α) bằng khoảng cách giữa d và (α) nên

$$d(d, (\alpha)) = \frac{|-1 + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

69. a) Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_0(1 ; -1 ; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1 ; -1 ; 0)$. Đường thẳng d_2 đi qua điểm M'_0 $(2 ; -2 ; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u'} = (-1 ; 1 ; 1)$. Vì $\overrightarrow{M_0M'_0} = (1 ; -1 ; -1) = -\vec{u'}$ nên hai đường thẳng đó cắt nhau, do đó khoảng cách giữa chúng bằng 0.

b) Hai đường thẳng song song.

Khoảng cách giữa chúng bằng khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này tới đường thẳng kia.

c) *Cách 1.* Đường thẳng d_1 đi qua $M_0(1 ; 2 ; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(1 ; 2 ; 3)$.

Đường thẳng d_2 đi qua $M'_0(2 ; -1 ; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(-1 ; 1 ; 1)$.

Khoảng cách giữa d_1 và d_2 là

$$d(d_1, d_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_0M'_0}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|} = \frac{\sqrt{26}}{13}.$$

Cách 2. Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_2 và song song với d_1. Khi đó, (α) đi qua $M'_0(2 ; -1 ; 0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-1 ; -4 ; 3)$.

Phương trình của mp(α) là : $x + 4y - 3z + 2 = 0$.

Vậy $d(d_1, d_2) = d(M_o, (\alpha)) = \dfrac{|1 + 4.2 - 3.3 + 2|}{\sqrt{1 + 16 + 9}} = \dfrac{\sqrt{26}}{13}$.

d) $d(d_1, d_2) = \sqrt{13}$.

70. 1. côsin của góc giữa đường thẳng và các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là : $\dfrac{\sqrt{6}}{3}; \dfrac{\sqrt{6}}{6}; \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

2. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng đã cho

a) $\cos\varphi = \dfrac{3\sqrt{6}}{14}$;

b) $\cos\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{77}\sqrt{26}}$;

71. Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α)

a) $\sin\varphi = \dfrac{1}{3\sqrt{14}}$;

b) $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$;

c) $\varphi = 30^o$;

d) $\varphi = 30^o$.

72. a) Phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M_o(1 ; -1 ; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng (α) là :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$$

Gọi $M'_o(x ; y ; z)$ là hình chiếu của M_o trên mp(α). Toạ độ của M'_o thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t \\ 2x - y + 2z + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{19}{9}.$$

Vậy $M'_o = \left(-\dfrac{29}{9}; \dfrac{10}{9}; -\dfrac{20}{9}\right)$.

b) $\overrightarrow{AB} = (-1 ; 2 ; -3)$, $\overrightarrow{AC} = (-3 ; 4 ; 1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (14 ; 10 ; 2)$.

Lấy một vectơ pháp tuyến của mp(ABC) là $\vec{n} = (7 ; 5 ; 1)$, ta có phương trình của mặt phẳng (ABC) : $7x + 5y + z - 37 = 0$.

Đường thẳng đi qua D và vuông góc với mp(ABC) có phương trình :

$$\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 + 5t \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

Toạ độ hình chiếu D' của D trên mp(ABC) thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 + 5t \\ z = 1 + t \\ 7x + 5y + z - 37 = 0. \end{cases}$$

Suy ra $D' = \left(\dfrac{81}{25}; \dfrac{13}{5}; \dfrac{33}{25}\right)$.

c) $\left(\dfrac{3}{34}; \dfrac{2}{17}; -\dfrac{3}{34}\right)$.

73. a) Trước hết, ta xác định hình chiếu vuông góc H của M_0 trên (α). Gọi d là đường thẳng qua M_0 và vuông góc với (α), ta có

$$d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 3t \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

Toạ độ điểm $H(x ; y ; z)$ thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 3t \\ z = 1 - t \\ x + 3y - z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow H = \left(\dfrac{28}{11}; -\dfrac{15}{11}; \dfrac{5}{11}\right).$$

Gọi M' là điểm đối xứng của M_0 qua mặt phẳng (α) thì H là trung điểm của M_0M' nên ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{x_{M'} + 2}{2} = \dfrac{28}{11} \\ \dfrac{y_{M'} - 3}{2} = -\dfrac{15}{11} \\ \dfrac{z_{M'} + 1}{2} = \dfrac{5}{11} \end{cases} \Rightarrow M' = \left(\dfrac{34}{11}; \dfrac{3}{11}; -\dfrac{1}{11}\right).$$

b) $A' = \left(\dfrac{48}{49}; \dfrac{24}{49}; \dfrac{65}{49}\right)$.

c) $B' = \left(\dfrac{12}{7}; \dfrac{18}{7}; \dfrac{34}{7}\right)$.

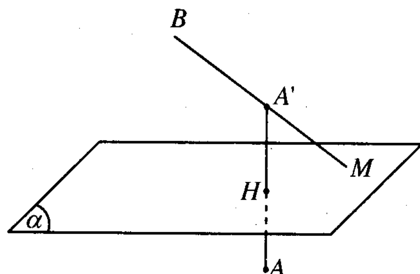
74. (h.102)

a) Theo chú ý ở bài tập 52, ta nhận thấy hai điểm A, B ở khác phía đối với mặt phẳng (α).

Gọi A' là điểm đối xứng của điểm A qua mặt phẳng (α), ta có :

$|MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B$ (không đổi).

Dấu "=" xảy ra khi A' nằm giữa hai điểm B, M hay M là giao điểm của đường thẳng $A'B$ với mp(α).



Hình 102

Vậy bài toán được giải theo trình tự sau :

* Xác định điểm A' đối xứng với điểm A qua mp(α), làm như bài 73, ta có $A' = (-1 ; 3 ; -2)$.

* Tìm giao điểm M của đường thẳng A'B với mp(α).

Đường thẳng $A'B$ có phương trình : $\begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = 3 - t \\ z = -2 - 11t. \end{cases}$

Toạ độ điểm $M(x ; y ; z)$ thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = 3 - t \\ z = -2 - 11t \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 1 \Rightarrow M = (7 ; 2 ; -13).$$

Vậy $|MA - MB|$ lớn nhất khi $M = (7 ; 2 ; -13)$.

b) Gọi I là trung điểm của đoạn $AB \Rightarrow I = (5 ; 2 ; 5)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = 2MI$.

Vậy $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất với I cố định và $M \in (\alpha) \Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên mp(α).

Toạ độ của $M(x ; y ; z)$ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 + t \\ z = 5 + t \\ x + y + z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -5 \Rightarrow M = (0 ; -3 ; 0).$$

Kết luận : $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất ($= 2MI = 10\sqrt{3}$) khi $M = (0 ; -3 ; 0)$.

75. a) Ta có $\overrightarrow{BC} = (1 ; -1 ; 7)$. Phương trình đường thẳng BC là

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -t \\ z = -3 + 7t. \end{cases}$$

Phương trình mp(α) đi qua A và vuông góc với BC là :

$$1(x + 1) - 1(y - 3) + 7(z - 2) = 0 \text{ hay } x - y + 7z - 10 = 0.$$

Gọi H là hình chiếu của điểm A trên đường thẳng BC thì toạ độ của $H(x;y;z)$ thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -t \\ z = -3 + 7t \\ x - y + 7z - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow H = \left(\frac{231}{51};-\frac{27}{51};\frac{36}{51}\right).$$

b) $H = (1 ; 0 ; -1)$.

76. a) Phương trình mặt phẳng qua điểm $M_0(2 ; -1 ; 1)$ và vuông góc với đường thẳng d đã cho là

$$2(x - 2) + (-1)(y + 1) + 2(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 2z - 7 = 0.$$

Gọi $H(x ; y ; z)$ là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng trên, ta có :

$$H = \left(\frac{17}{9};-\frac{13}{9};\frac{8}{9}\right).$$

Gọi $M'_0(x ; y ; z)$ là điểm đối xứng với điểm M_0 qua đường thẳng d thì H là trung điểm của đoạn thẳng $M_0M'_0$. Do đó

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{17}{9} \\ \dfrac{y-1}{2} = -\dfrac{13}{9} \\ \dfrac{z+1}{2} = \dfrac{8}{9}. \end{cases}$$

Vậy $M'_0 = \left(\frac{16}{9};-\frac{17}{9};\frac{7}{9}\right)$.

b) Ta xác định được vectơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{u_{d}} = (3 ; 4 ; 2)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng qua M_0 và vuông góc với d là :

$$(\alpha) : 3x + 4y + 2z + 7 = 0.$$

Gọi $H(x ; y ; z)$ là giao điểm của d và (α), ta có $H = (1 ; -3 ; 1)$.

Gọi $M'_0(x ; y ; z)$ là điểm đối xứng của M_0 qua d, ta có $M'_0 = (5 ; -7 ; 3)$.

c) Ta xác định vectơ chỉ phương của d :

$$\overrightarrow{u_d} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (0 ; 2 ; -2).$$

Gọi (α) là mặt phẳng qua M_0 và vuông góc với d, khi đó (α) có phương trình :

$$y - z + 2 = 0.$$

Gọi H là giao điểm của d với mp(α), toạ độ của $H(x ; y ; z)$ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} y + z - 4 = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow H = (1 ; 1 ; 3).$$

Từ đó, điểm M'_0 đối xứng với M_0 qua d là $M'_0 = (0 ; 3 ; 5)$.

77. a) *Cách 1* : Ta có $\overrightarrow{u_d} = (2 ; 3 ; -5)$, $\overrightarrow{u_{d'}} = (3 ; -2 ; -1)$.

Khi đó vì $\left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{u_{d'}}\right] = (-13 ; -13 ; -13)$ nên đường vuông góc chung Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1 ; 1 ; 1)$.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d và Δ thì (α) đi qua M_0 $(2 ; 3 ; -4)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha} = \left[\overrightarrow{u_d}, \vec{u}\right] = (8 ; -7 ; -1)$.

Phương trình của mp(α) là : $8(x - 2) - 7(y - 3) - 1(z + 4) = 0$

$$\Leftrightarrow 8x - 7y - z + 1 = 0.$$

Gọi (β) là mặt phẳng chứa d' và Δ thì (β) đi qua điểm $M'_0(-1 ; 4 ; 4)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\beta} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{u_{d'}}\right] = (1 ; 4 ; -5)$.

Phương trình của mp(β) là : $1(x + 1) + 4(y - 4) - 5(z - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow x + 4y - 5z + 5 = 0.$$

Vậy đường vuông góc chung Δ của d và d' là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β). Nó có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

Cách 2 : Điểm $M \in d$ có toạ độ là $M = (2 + 2t ; 3 + 3t ; -4 - 5t)$,

điểm $N \in d'$ có toạ độ là $N = (-1 + 3t' ; 4 - 2t' ; 4 - t')$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-3 + 3t' - 2t ; 1 - 2t' - 3t ; 8 - t' + 5t)$.

MN là đường vuông góc chung của d và d' khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_d} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_{d'}} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-3 + 3t' - 2t) + 3(1 - 2t' - 3t) - 5(8 - t' + 5t) = 0 \\ 3(-3 + 3t' - 2t) - 2(1 - 2t' - 3t) - 1(8 - t' + 5t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5t' - 38t = 43 \\ 14t' - 5t = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 \\ t = -1. \end{cases}$$

Suy ra $M = (0 ; 0 ; 1)$, $N = (2 ; 2 ; 3) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (2 ; 2 ; 2)$.

Vậy phương trình chính tắc của đường vuông góc chung Δ là

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

b) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z}{2}.$

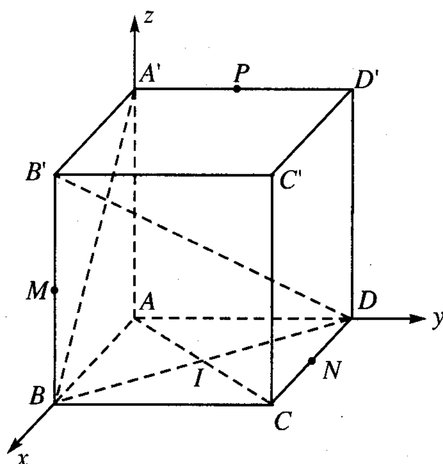
78. a) Ta chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho gốc toạ độ là A, tia Ox chứa AB, tia Oy chứa AD và tia Oz chứa AA' (h.103). Khi đó

$A = (0 ; 0 ; 0)$, $B = (1 ; 0 ; 0)$

$D = (0 ; 1 ; 0)$, $A' = (0 ; 0 ; 1)$

$C = (1 ; 1 ; 0)$, $B' = (1 ; 0 ; 1)$

$C' = (1 ; 1 ; 1)$, $D' = (0 ; 1 ; 1)$.



Hình 103

Suy ra $\overrightarrow{A'B} = (1 ; 0 ; -1)$

$\overrightarrow{B'D} = (-1 ; 1 ; -1)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'D}\right] = (1 ; 2 ; 1).$

Lại có $\overrightarrow{A'B'} = (1 ; 0 ; 0)$ nên

$$d(A'B, B'D) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'D}\right].\overrightarrow{A'B'}\right|}{\left\|\left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'D}\right]\right\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Ta lại có : $P = \left(0; \frac{1}{2}; 1\right), I = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{IP} = \left(-\frac{1}{2}; 0; 1\right),$

$\overrightarrow{AC'} = (1 ; 1 ; 1), \ \overrightarrow{AP} = \left(0; \frac{1}{2}; 1\right).$

Suy ra $d(PI, AC') = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{AC'}\right].\overrightarrow{AP}\right|}{\left\|\left[\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{AC'}\right]\right\|} = \dfrac{\sqrt{14}}{28}.$

b) Ta có $M = \left(1; 0; \frac{1}{2}\right), N = \left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MP} = \left(-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \ \overrightarrow{NC'} = \left(\frac{1}{2}; 0; 1\right).$

$\Rightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{NC'} = 0 \Rightarrow MP \perp NC'.$

Mặt phẳng (PAI) có vectơ pháp tuyến : $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AI}\right] = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right).$

Mặt phẳng $(DCC'D')$ có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AD} = (0 ; 1 ; 0).$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng trên thì

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{2}{3}.$$

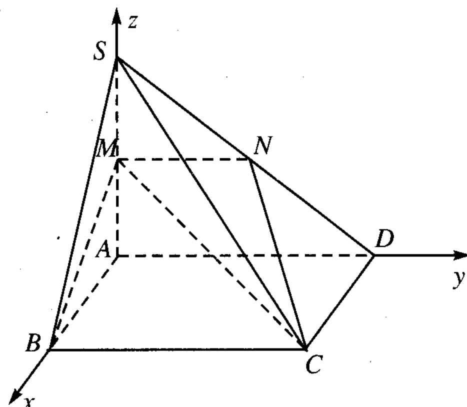
79. Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho gốc O là điểm A, tia Ox chứa AB, tia Oy chứa AD và tia Oz chứa SA (h.104). Khi đó

$A = (0 ; 0 ; 0), B = (a ; 0 ; 0),$

$C = (a ; a ; 0), D = (0 ; a ; 0),$

$S = (0 ; 0 ; 2a), M = (0 ; 0 ; a),$

$N = \left(0; \frac{a}{2}; a\right).$



Hình 104

a) $\overrightarrow{BC} = (0 ; a ; 0)$,

$\overrightarrow{BM} = (-a ; 0 ; a)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}\right] = \left(\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & -a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix}\right) = (a^2 ; 0 ; a^2).$$

Do đó, mặt phẳng (BCM) có một vectơ pháp tuyến là $(1 ; 0 ; 1)$, suy ra phương trình mặt phẳng (BCM) là :

$$1(x - a) + 1(z - 0) = 0 \Leftrightarrow x + z - a = 0.$$

Vậy khoảng cách từ A đến mp(BCM) là

$$d(A, (BCM)) = \frac{|-a|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Ta lại có : $\overrightarrow{BS} = (-a ; 0 ; 2a)$, $\overrightarrow{CN} = \left(-a; -\frac{a}{2}; a\right)$, $\overrightarrow{SC} = (a ; a ; -2a)$.

$$\text{Suy ra } \left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN}\right] = \left(\begin{vmatrix} 0 & 2a \\ -\frac{a}{2} & a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2a & -a \\ a & -a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -a & 0 \\ -a & -\frac{a}{2} \end{vmatrix}\right) = \left(a^2; -a^2; \frac{a^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN}\right].\overrightarrow{SC} = a^3 - a^3 - a^3 = -a^3.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CN là

$$d(SB, CN) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN}\right].\overrightarrow{SC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN}\right]\right|} = \frac{|-a^3|}{\sqrt{a^4 + a^4 + \frac{a^4}{4}}} = \frac{a^3}{\frac{3a^2}{2}} = \frac{2a}{3}.$$

b) Vì $\left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}\right] = \left(0; 2a^2; a^2\right)$ nên mp(SCD) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (0 ; 2 ; 1)$.

Vì $\left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right] = \left(2a^2 ; 0 ; a^2\right)$ nên mp(SBC) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n'} = (2 ; 0 ; 1)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC), ta có

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{n'}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{n'}\right|} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \frac{1}{5}.$$

c) $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a^2.2a = \frac{2}{3}a^3.$

Vì M là trung điểm của SA suy ra $d(S, (BCM)) = d(A, (BCM)) = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Hình chóp $S.ABCD$ bị mp(BCM) chia thành hai phần, trong đó có một phần là hình chóp $S.BCNM$. Hình chóp này có đường cao bằng $d(S, (BCM)) = \frac{a}{\sqrt{2}}$ và đáy là hình thang $BCNM$ có diện tích bằng $\frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right)a\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}a^2}{4}$.

Suy ra : $V_{S.BCNM} = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{2}a^2}{4}.\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3}{4}$.

Vậy tỉ số thể tích giữa hai phần của hình chóp $S.ABCD$ chia bởi mp(BCM) là :

$$\frac{\frac{a^3}{4}}{\frac{2a^3}{3} - \frac{a^3}{4}} = \frac{3}{5}.$$

80. a) Ta nhận thấy mp(P_1) // mp(P_2).

Gọi A là giao điểm của đường thẳng d với mp(P_1). Toạ độ $(x ; y ; z)$ của A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \\ x + 2y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$. Suy ra $A = (1 ; -1 ; -1)$.

Gọi B là giao điểm của đường thẳng d với mp(P_2). Toạ độ $(x ; y ; z)$ của B là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \\ x + 2y + 2z + 7 = 0 \end{cases}$. Suy ra $B = (5 ; -1 ; -5)$.

Tâm I của mặt cầu phải tìm là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Do đó $I = (3 ; -1 ; -3)$. Bán kính của mặt cầu phải tìm là

$$R = d(I, (P_1)) = \frac{|3 - 2 - 6 + 3|}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}.$$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là :

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z + 3)^2 = \frac{4}{9}.$$

b). Gọi $I(a\,;\,b\,;\,c)$ là tâm của mặt cầu cần tìm, do $I \in d$ nên

$$\frac{a}{2} = \frac{b-1}{1} = \frac{c+1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b + 2 = 0 \\ a - c - 1 = 0. \end{cases}$$

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với cả mp(P_1) và mp(P_2) nên :

$$d(I, (P_1)) = d(I, (P_2)) = R$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a + b - 2c + 5|}{\sqrt{6}} = \frac{|2a - b + c + 2|}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - 2b + 3c = 3 \\ 3a - c = -7. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện trên ta có :

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - 2b + 2 = 0 \\ a - c - 1 = 0 \\ a - 2b + 3c - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow I_1 = \left(\frac{8}{3}; \frac{7}{3}; \frac{5}{3}\right), R_1 = \frac{20}{3\sqrt{6}}. \\ \begin{cases} a - 2b + 2 = 0 \\ a - c - 1 = 0 \\ 3a - c + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow I_2 = (-4; -1; -5), R_2 = \frac{10}{\sqrt{6}}. \end{array}\right.$$

Vậy có hai mặt cầu có tâm nằm trên d và tiếp xúc với $(P_1), (P_2)$, chúng có phương trình là

$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{200}{27},$$

$$(x + 4)^2 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2 = \frac{50}{3}.$$

81. Với điểm $M(x;y;z)$ bất kì, ta tính được các khoảng cách từ M tới d_1 và d_2 là :

$$h_1 = \sqrt{(z-1)^2 + x^2}, \qquad h_2 = \sqrt{(z+1)^2 + y^2}.$$

M cách đều d_1 và d_2 khi và chỉ khi

$$h_1 = h_2 \Leftrightarrow \sqrt{(z-1)^2 + x^2} = \sqrt{(z+1)^2 + y^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2z = y^2 + 2z$$
$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4z.$$

Xét các trường hợp sau :

+ $M \in$ mp(Oxy), khi đó $z = 0$ suy ra $x^2 - y^2 = 0$.

Vậy quỹ tích điểm M là cặp đường thẳng $y = \pm x$ nằm trong mặt phẳng $z = 0$.

+ $M \in$ mp(Oyz), tức là $x = 0$. Quỹ tích điểm M là đường parabol $y^2 = -4z$ nằm trong mặt phẳng $x = 0$.

+ $M \in$ mp(Oxz), tức là $y = 0$. Quỹ tích điểm M là đường parabol $x^2 = 4z$ nằm trong mặt phẳng $y = 0$.

82. Gọi d_1 là đường thẳng qua M_o $(x_o ; y_o ; z_o)$ và song song với trục Ox thì d_1 có vectơ chỉ phương là $(1 ; 0 ; 0)$. Ta có phương trình của d_1 là

$$d_1 : \begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_o \\ z = z_o. \end{cases}$$

Gọi M_1 là giao điểm của d_1 với mp(α). Toạ độ $(x;y;z)$ của M_1 thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x = x_o + t \\ y = y_o \\ z = z_o \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_1 = \left(x_o - \frac{Ax_o + By_o + Cz_o + D}{A} ; y_o ; z_o \right)$$

$$\Rightarrow M_oM_1 = \left| \frac{Ax_o + By_o + Cz_o + D}{A} \right|.$$

Tương tự, gọi d_2 là đường thẳng đi qua M_o và song song với Oy, d_2 cắt (α) tại M_2 thì

$$M_oM_2 = \left| \frac{Ax_o + By_o + Cz_o + D}{B} \right|.$$

Gọi d_3 là đường thẳng đi qua M_o và song song với Oz, d_3 cắt (α) tại M_3 thì

$$M_oM_3 = \left| \frac{Ax_o + By_o + Cz_o + D}{C} \right|.$$

Dễ thấy M_oM_1, M_oM_2, M_oM_3 đôi một vuông góc, do đó

$$V_{M_oM_1M_2M_3} = \frac{1}{6} M_oM_1.M_oM_2.M_oM_3 = \frac{\left| Ax_o + By_o + Cz_o + D \right|^3}{6.\left| A.B.C \right|}.$$

83. a) Đường thẳng d' là giao tuyến của hai mặt phẳng có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (0 ; 3 ; -1)$ và $\overrightarrow{n'} = (3 ; 3 ; -2)$ nên d' có một vectơ chỉ phương là :

$$\overrightarrow{u_{d'}} = -\frac{1}{3}\left[\vec{n}, \overrightarrow{n'}\right] = (1 ; 1 ; 3).$$

Vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$ của d là $\overrightarrow{u_d} = (2 ; 1 ; -1)$.

Vì $\overrightarrow{u_d} . \overrightarrow{u_{d'}} = 0$ nên $d \perp d'$.

Ta dễ chứng minh d và d' không có điểm chung (hệ phương trình lập ra từ phương trình hai đường thẳng này vô nghiệm). Vậy chúng chéo nhau.

b) Ta lấy một điểm A nào đó thuộc d'. Chẳng hạn cho $y = 0$ thì $z = -7$, $x = 1$, ta có $A(1 ; 0 ; -7) \in d'$. Vì $d \perp d'$ nên mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d sẽ đi qua d'. Vậy phương trình mặt phẳng (P) là :

$$2(x-1) + (y-0) - (z+7) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - z - 9 = 0.$$

Toạ độ giao điểm $H(x ; y ; z)$ của d và (P) thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \\ 2x + y - z - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{5}{3} \Rightarrow H = \left(\frac{13}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

c) Mặt phẳng (Q) song song với mp(Oxy) nên có phương trình

$$z = m \qquad (m \neq 0).$$

Toạ độ giao điểm $M(x ; y ; z)$ của d và (Q) thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \\ z = m \end{cases} \Rightarrow M = (5 - 2m ; 1 - m ; m).$$

Toạ độ giao điểm $M'(x ; y ; z)$ của d' và (Q) thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} 3y - z - 7 = 0 \\ 3x + 3y - 2z - 17 = 0 \\ z = m \end{cases} \Rightarrow M' = \left(\frac{10 + m}{3}; \frac{7 + m}{3}; m\right).$$

Gọi I là trung điểm của MM' thì $I = \left(\frac{25-5m}{6};\frac{5-m}{3};m\right)$.

Vậy quỹ tích của I là đường thẳng có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = \dfrac{25-5m}{6} \\ y = \dfrac{5-m}{3} \\ z = m \end{cases};$$

bỏ đi điểm $\left(\frac{25}{6};\frac{5}{3};0\right)$ (ứng với $m = 0$).

84. a) Δ_m là giao tuyến của hai mặt phẳng với các vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}(m;1;-m)$ và $\overrightarrow{n_2}(1;-m;1)$. Vậy Δ_m có vectơ chỉ phương là

$$\overrightarrow{u_m} = \left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right] = (1-m^2;-2m;-1-m^2).$$

Trục Oz có vectơ chỉ phương $\vec{k} = (0;0;1)$.

Vậy nếu gọi φ_m là góc giữa hai đường thẳng Δ_m và Oz thì

$$\cos\varphi_m = \frac{\left|\overrightarrow{u_m}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{u_m}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \frac{1+m^2}{\sqrt{(1-m^2)^2+4m^2+(1+m^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $\varphi_m = 45^o$ (không đổi).

Điểm $M(x;y;z)$ thuộc Δ_m khi toạ độ của M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} mx+y-mz-1=0 \\ x-my+z-m=0. \end{cases} \quad (*)$$

Khử z từ hệ phương trình (*), ta được phương trình

$$2mx+(1-m^2)y-1-m^2=0 \text{ (không chứa } z).$$

Đây là phương trình của mặt phẳng (α_m) chứa Δ_m và song song với trục Oz. Do đó, khoảng cách giữa Δ_m và Oz bằng khoảng cách từ gốc $O(0;0;0)$ thuộc Oz tới mp(α_m). Vậy khoảng cách đó bằng :

$$d_m = \frac{\left|-1-m^2\right|}{\sqrt{4m^2+(1-m^2)^2}} = 1 \text{ (không đổi).}$$

b) Toạ độ giao điểm M của Δ_m và mp(Oxy) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x - my = m \\ z = 0. \end{cases}$$

Bình phương hai vế của hai phương trình đầu của hệ rồi cộng lại, ta suy ra

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O, bán kính bằng 1 trong mặt phẳng toạ độ (Oxy).

85. a) Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = (8 ; 4 ; 1)$.

Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2} = (2 ; -2 ; 1)$.

Vì $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (6 ; -6 ; -24)$ nên $\vec{n} = (1 ; -1 ; -4)$ là một vectơ pháp tuyến của (P_1) và (P_2).

Mặt phẳng (P_1) đi qua $M_1(-23 ; -10 ; 0)$ nên có phương trình :

$$(x + 23) - (y + 10) - 4z = 0 \text{ hay } x - y - 4z + 13 = 0.$$

Mặt phẳng (P_2) đi qua $M_2(3 ; -2 ; 0)$ nên có phương trình :

$$(x - 3) - (y + 2) - 4z = 0 \quad \text{hay} \quad x - y - 4z - 5 = 0.$$

b) Khoảng cách h giữa d_1 và d_2 bằng khoảng cách từ điểm M bất kì thuộc (P_1) tới (P_2). Lấy $M = (0 ; 1 ; 3)$, ta có $h = \dfrac{|-1 - 12 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2}} = \dfrac{18}{\sqrt{18}} = 3\sqrt{2}$.

c) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua d_1 và song song với Oz, (α) có phương trình :

$$x - 2y + 3 = 0 \quad \left(\text{vì } \overrightarrow{n_\alpha} = \left[\overrightarrow{u_1}, \vec{k}\right]\right).$$

Tương tự, mặt phẳng (β) đi qua d_2 và song song với Oz có phương trình :

$$x + y - 1 = 0 \quad \left(\text{vì } \overrightarrow{n_\beta} = \left[\overrightarrow{u_2}, \vec{k}\right]\right).$$

Dễ thấy giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) chính là đường thẳng Δ cần tìm. Nó có phương trình là

$$\begin{cases} x = \dfrac{-1}{3} \\ y = \dfrac{4}{3} \\ z = t. \end{cases}$$

86. a) Ta có $\overrightarrow{OA} = (1 ; 2 ; -1)$, $\overrightarrow{OB} = (-1 ; 1 ; 1)$, $\overrightarrow{OC} = (1 ; 0 ; 1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$, $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 0$, $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = 0$

$\Rightarrow OA \perp OB$, $OB \perp OC$, $OC \perp OA$.

b) Giả sử $S(x ; y ; z)$ là điểm thoả mãn điều kiện đầu bài. Ta có :

$$\overrightarrow{SA} = (1 - x ; 2 - y ; -1 - z),$$
$$\overrightarrow{SB} = (-1 - x ; 1 - y ; 1 - z),$$
$$\overrightarrow{SC} = (1 - x ; -y ; 1 - z).$$

Ta có : $\begin{cases} \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = 0 \\ \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC} = 0 \\ \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - y - 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3y = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Khi $x = 0$ thì $y = z = 0$, điểm S trùng với điểm O.

Khi $x = \dfrac{2}{3}$ thì $y = z = \dfrac{4}{3}$, $S = \left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{4}{3} ; \dfrac{4}{3}\right)$ là điểm duy nhất khác O sao cho tứ diện $SABC$ là tứ diện vuông.

c) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn AB, AC, ta có $M = \left(0 ; \dfrac{3}{2} ; 0\right)$, $N = (1 ; 1 ; 0)$, suy ra M, N đều thuộc mp(Oxy). Như vậy mp(Oxy) cắt tam giác ABC theo đường trung bình MN, do đó chia tam giác ABC thành hai phần : tam giác AMN và hình thang $MNCB$. Rõ ràng là tỉ số diện tích hai phần đó là 1 : 3.

d) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2 ; -1 ; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (0 ; -2 ; 2)$.

Vì $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (2;4;4)$ nên mp(ABC) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(1;2;2)$.

mp(Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0 ; 0 ; 1)$.

Gọi φ là góc hợp bởi mp(ABC) và mp(Oxy) thì :

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \frac{2}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{2}{3}.$$

87. a) Ta có vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = (2 ; -3 ; 2)$.

Mặt phẳng (P) vuông góc với d, do đó có dạng :

$$(P) : 2x - 3y + 2z + D = 0.$$

Mặt cầu (S) có tâm $I = (5 ; -1 ; -13)$ và bán kính $R = \sqrt{308}$, vì vậy (P) tiếp xúc với (S) khi và chỉ khi $d(I, (P)) = \sqrt{308}$

$$\Leftrightarrow \frac{|10 + 3 - 26 + D|}{\sqrt{4+9+4}} = \sqrt{308}$$

$$\Leftrightarrow |D - 13| = \sqrt{17.308} \Rightarrow D = 13 \pm \sqrt{5236}.$$

Tóm lại, có hai mp(P) thoả mãn yêu cầu đầu bài là

$$2x - 3y + 2z + 13 \pm \sqrt{5236} = 0.$$

b) Vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (2 ; -3 ; 2)$.

Vectơ chỉ phương của d' là $\overrightarrow{u'} = (3 ; -2 ; 0)$.

Mặt phẳng (Q) cần tìm có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{u'}\right] = (4 ; 6 ; 5)$.

Vì vậy phương trình của mp(Q) có dạng : $4x + 6y + 5z + D = 0$.

Để (Q) tiếp xúc với (S), điều kiện là :

$$d(I, (Q)) = \sqrt{308} \Leftrightarrow \frac{|20 - 6 - 65 + D|}{\sqrt{16 + 36 + 25}} = \sqrt{308}$$

$$\Leftrightarrow |D - 51| = \sqrt{23716} = 154 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D = -103 \\ D = 205. \end{array}\right.$$

Vậy có hai mặt phẳng (Q) cần tìm :

$$4x + 6y + 5z - 103 = 0,$$

$$4x + 6y + 5z + 205 = 0.$$

88. a) $d(O,(\alpha_m)) = \dfrac{20}{\sqrt{9m^2 + 25(1-m^2) + 16m^2}} = \dfrac{20}{\sqrt{25}} = 4.$

b) Từ câu a) suy ra rằng : khi m thay đổi, các mặt phẳng (α_m) luôn tiếp xúc với mặt cầu cố định tâm O và bán kính bằng 4.

c) Mặt phẳng (α_m) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3m\ ;\ 5\sqrt{1-m^2}\ ;\ 4m)$, vì vậy (α_m) cắt mp(Oxz) (có vectơ pháp tuyến $\vec{j} = (0\ ;\ 1\ ;\ 0)$) khi và chỉ khi $m \neq 0$. Khi đó, giao tuyến Δ_m của mp(α_m) và mp(Oxz) là giao tuyến của hai mặt phẳng :

$$3mx + 5\sqrt{1-m^2}\,y + 4mz + 20 = 0 \text{ và } y = 0.$$

Do đó, vectơ chỉ phương của Δ_m là

$$\vec{u} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5\sqrt{1-m^2} & 4m \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4m & 3m \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3m & 5\sqrt{1-m^2} \end{vmatrix}\right) = \left(4m\ ;\ 0\ ;\ -3m\right).$$

Vì $m \neq 0$ nên $\vec{u'} = (4\ ;\ 0\ ;\ -3)$ là một vectơ chỉ phương của Δ_m.

Do $\vec{u'}$ không phụ thuộc vào m nên các giao tuyến Δ_m song song với nhau khi m thay đổi.

 Ôn tập chương III

Bài tập tự luận

89. a) Xét hai vectơ : $\vec{u} = (1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ và $\vec{v} = (\sqrt{5x+2}\ ;\ \sqrt{5y+2}\ ;\ \sqrt{5z+2})$.

Ta có $\quad |\vec{u}| = \sqrt{3}$, $|\vec{v}| = \sqrt{5(x+y+z)+6} = 6$,

$\vec{u}.\vec{v} = \sqrt{5x+2} + \sqrt{5y+2} + \sqrt{5z+2}$.

Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}.\vec{v}| \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$ suy ra đpcm .

b) Xét hai vectơ : $\vec{u} = \left(\sin x\,;1;\sqrt{2-\sin^2 x}\right)$ và $\vec{v} = (1;\sqrt{2-\sin^2 x}\,;\sin x)$.

Từ $|\vec{u}.\vec{v}| \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$ suy ra đpcm.

c) Xét hai vectơ : $\vec{u} = \left(\sqrt{x+m}\,;\sqrt{x+n}\,;\sqrt{m+n}\right)$ và $\vec{v} = (1\,;\,1\,;\,1)$.

Ta có $|\vec{u}| = \sqrt{2}$, $|\vec{v}| = \sqrt{3}$ suy ra $f(x) = \vec{u}.\vec{v} \le |\vec{u}||\vec{v}| = \sqrt{6}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng hướng, nghĩa là

$$\frac{\sqrt{x+m}}{1} = \frac{\sqrt{x+n}}{1} = \frac{\sqrt{m+n}}{1} > 0 \Leftrightarrow x = m = n > 0.$$

Kết hợp với $x + m + n = 1$ suy ra $x = m = n = \dfrac{1}{3}$

Vậy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi $x = m = n = \dfrac{1}{3}$.

d) Đặt $\vec{u} = (x+1\,;\,y\,;\,2)$, $\vec{v} = (-x\,;\,-y-1\,;\,1)$, ta có $\vec{u}+\vec{v} = (1;-1;3)$.

Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}+\vec{v}| \le |\vec{u}| + |\vec{v}|$, ta suy ra

$$A = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + 4} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2 + 1} \ge \sqrt{11}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng, nghĩa là

$$\frac{x+1}{-x} = \frac{y}{-y-1} = \frac{2}{1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{11}$ khi $x = -\dfrac{1}{3}, y = -\dfrac{2}{3}$.

e) Trong không gian $Oxyz$, ta lấy các điểm $A(1\,;\,1\,;\,-1)$, $B(-1\,;\,1\,;\,1)$ và $M(x\,;\,y\,;\,z)$. Khi đó $AB = 2\sqrt{2}$ và

$$MA = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}\,, MB = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}\,.$$

Từ bất đẳng thức $MA + MB \ge AB$, ta suy ra

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} \ge 2\sqrt{2}.$$

Dấu = xảy ra khi M nằm giữa hai điểm A, B hay $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}, 0 \le t \le 1$. nghĩa là

$$\begin{cases} x - 1 = -2t \\ y - 1 = 0 \\ z + 1 = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$$

90. a) Đường thẳng d đi qua điểm (12 ; 9 ; 1) và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(4 ; 3 ; 1)$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = (3 ; 5 ; -1)$.

Vì $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P} = 4.3 + 3.5 + 1.(-1) = 26 \neq 0$ nên d cắt (P).

Gọi A là giao điểm của d với (P), toạ độ điểm $A(x ; y ; z)$ thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \\ 3x + 5y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -3 \Rightarrow A = (0 ; 0 ; -2).$$

Gọi α là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P), ta có :

$$\sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{n_P}\right|} = \frac{26}{\sqrt{26}.\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{35}}.$$

b) Mặt phẳng (P') vuông góc với d nên có vectơ pháp tuyến là vectơ chỉ phương của d. Do đó, (P') có phương trình :

$$4(x - 1) + 3(y - 2) + 1(z + 1) = 0 \text{ hay } 4x + 3y + z - 9 = 0.$$

c) Hình chiếu d' của d trên mp(P) là giao tuyến của mp(P) và mp(Q), với (Q) đi qua d và vuông góc với (P). Như vậy, (Q) có vectơ pháp tuyến là :

$$\overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_P}\right] = \left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\right) = (-8 ; 7 ; 11).$$

Phương trình tổng quát của mp(Q) là

$$-8(x - 12) + 7(y - 9) + 11(z - 1) = 0 \text{ hay } 8x - 7y - 11z - 22 = 0.$$

Vậy hình chiếu d' của d trên mp(P) là giao tuyến của hai mặt phẳng :

$$3x + 5y - z - 2 = 0 \text{ và } 8x - 7y - 11z - 22 = 0.$$

Đường thẳng d' có phương trình tham số là .

$$\begin{cases} x = 62t \\ y = -25t \\ z = -2 + 61t. \end{cases}$$

d) (P) là mặt phẳng trung trực của BB' khi và chỉ khi $BB' \perp (P)$ và giao điểm của BB' với (P) là trung điểm của đoạn thẳng BB'.

Ta có phương trình đường thẳng BB' là

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5t \\ z = -1 - t. \end{cases}$$

Gọi H là giao điểm của BB' với (P) thì toạ độ $(x ; y ; z)$ của H thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5t \\ z = -1 - t \\ 3x + 5y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{2}{35} \Rightarrow H = \left(\frac{29}{35} ; -\frac{2}{7} ; -\frac{33}{35}\right).$$

H là trung điểm của BB' nên

$$\begin{cases} x_{B'} = 2x_H - x_B = \dfrac{23}{35} \\ y_{B'} = 2y_H - y_B = -\dfrac{4}{7} \\ z_{B'} = 2z_H - z_B = -\dfrac{31}{35} \end{cases} \Rightarrow B' = \left(\frac{23}{35} ; -\frac{4}{7} ; -\frac{31}{35}\right).$$

e) Đường thẳng Δ phải tìm nằm trong mp(P), đồng thời nằm trong mặt phẳng (R) đi qua $A(0 ; 0 ; -2)$ và vuông góc với d.

Mặt phẳng (R) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_R} = (4 ; 3 ; 1)$ nên có phương trình

$$4x + 3y + z + 2 = 0.$$

Vậy Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $3x + 5y - z - 2 = 0$ và $4x + 3y + z + 2 = 0$, suy ra Δ có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = 8t \\ y = -7t \\ z = -2 - 11t. \end{cases}$$

91. a) Vì $\overrightarrow{n_\alpha} = (2 ; -1 ; 3)$, $\overrightarrow{n_{\alpha'}} = (1 ; -1 ; 1)$ nên $\overrightarrow{n_\alpha}$ và $\overrightarrow{n_{\alpha'}}$ không cùng phương, do đó hai mặt phẳng (α) và (α') cắt nhau.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng đó, ta có :

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{n_{\alpha'}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|.\left|\overrightarrow{n_{\alpha'}}\right|} = \frac{|2.1 + (-1)(-1) + 3.1|}{\sqrt{4+1+9}.\sqrt{1+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{14}.\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{14}}.$$

b) $M(x; y; z)$ thuộc Δ khi và chỉ khi toạ độ của M thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + 1 = 0 \\ x - y + z + 5 = 0. \end{cases}$$

Đặt $z = t$, ta có

$$\begin{cases} 2x - y = -1 - 3t \\ x - y = -5 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 9 - t. \end{cases}$$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là

$$\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 9 - t \\ z = t. \end{cases}$$

c) Vì H là giao điểm của đường thẳng đi qua M, vuông góc với (α) và (α) nên toạ độ $(x ; y ; z)$ của H thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 5 + 3t \\ 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{9}{7} \Rightarrow H = \left(-\frac{11}{7}; \frac{9}{7}; \frac{8}{7}\right).$$

Vì K là giao điểm của đường thẳng đi qua M, vuông góc với (α') và (α') nên toạ độ $(x ; y ; z)$ của K thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 5 + t \\ x - y + z + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{11}{3} \Rightarrow K = \left(-\frac{8}{3} ; \frac{11}{3} ; \frac{4}{3}\right).$$

Vậy $HK = \sqrt{\left(-\frac{8}{3} + \frac{11}{7}\right)^2 + \left(\frac{11}{3} - \frac{9}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{8}{7}\right)^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{23}{21}\right)^2 + \left(\frac{50}{21}\right)^2 + \left(\frac{4}{21}\right)^2} = \frac{\sqrt{3045}}{21}.$$

d) Δ là đường thẳng đi qua $M_0(4 ; 9 ; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}(-2 ; -1 ; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{M_0M} = (-3 ; -9 ; 5)$, suy ra

$$\left[\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{u_\Delta}\right] = \left(\begin{vmatrix}-9 & 5\\ -1 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}5 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-3 & -9\\ -2 & -1\end{vmatrix}\right) = (-4 ; -7 ; -15).$$

Vậy $d(M, \Delta) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{u_\Delta}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|} = \dfrac{\sqrt{(-4)^2 + (-7)^2 + (-15)^2}}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \dfrac{\sqrt{145}}{\sqrt{3}}.$

e) Gọi (β) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với Δ. Phương trình của (β) là $-2(x-1) - 1(y-0) + 1(z-5) = 0$ hay $2x + y - z + 3 = 0$.

Gọi $J(x ; y ; z)$ là giao điểm của đường thẳng Δ với mặt phẳng (β). Toạ độ của J thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 9 - t \\ z = t \\ 2x + y - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{10}{3} \Rightarrow J = \left(-\frac{8}{3} ; \frac{17}{3} ; \frac{10}{3}\right).$$

MJ chính là đường thẳng qua M, vuông góc và cắt đường thẳng Δ ; nó có phương trình chính tắc là

$$\frac{x-1}{11} = \frac{y}{-17} = \frac{z-5}{5}.$$

g) Gọi (R) là mặt phẳng qua Δ (giao tuyến của (α) và (α')) và vuông góc với mp(P) : $3x - y + 1 = 0$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = (3 ; -1 ; 0)$.

Khi đó (R) đi qua điểm $M_0 = (4 ; 9 ; 0)$ và có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_R} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{n_P}\right] = \left(\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-2 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix}\right) = (1 ; 3 ; 5).$$

Vậy phương trình của mp(R) là

$$1(x-4) + 3(y-9) + 5(z-0) = 0 \text{ hay } x + 3y + 5z - 31 = 0.$$

92. a) Đường thẳng Δ đi qua $N_0(3\ ;-1\ ;4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;2;0)$.

Đường thẳng Δ' đi qua $N'_0(-2\ ;0\ ;2)$ và có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{u'}=\left(\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right)=(2\ ;2\ ;4).$$

Ta có $\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]=(8\ ;-4\ ;-2)$, $\overrightarrow{N_0N'_0}=(-5\ ;1\ ;-2)$, suy ra

$$\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{N_0N'_0}=8(-5)+(-4).1-2(-2)=-40\neq 0.$$

Vậy Δ và Δ' chéo nhau.

b) Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ' và song song với Δ, khi đó (P) đi qua điểm $N'_0(-2\ ;0\ ;2)\in\Delta'$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=\frac{1}{2}\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]=(4\ ;-2\ ;-1)$.

Vậy phương trình mp(P) là :

$$4(x+2)-2(y-0)-1(z-2)=0 \text{ hay } 4x-2y-z+10=0.$$

c) Gọi (Q) là mặt phẳng qua $M_0(1\ ;1\ ;2)$ và vuông góc với Δ. Khi đó, (Q) nhận vectơ $\vec{u}=(1\ ;2\ ;0)$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy (Q) có phương trình :

$$1(x-1)+2(y-1)=0 \text{ hay } x+2y-3=0.$$

d) Gọi d là đường thẳng qua M_0, cắt cả Δ và Δ'. Khi đó, d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\beta)=(M_0,\Delta)$ và $(\beta')=(M_0,\Delta')$.

Mặt phẳng (β) đi qua $M_0(1;1;2)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\beta}=\left[\overrightarrow{M_0N_0},\vec{u}\right]$.

Ta có $\overrightarrow{M_0N_0}=(2\ ;-2\ ;2)$, $\vec{u}=(1\ ;2\ ;0)$, suy ra

$$\overrightarrow{n_\beta}=\left(\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right)=(-4\ ;2\ ;6).$$

Vậy phương trình mp(β) là :

$$-4(x-1)+2(y-1)+6(z-2)=0 \quad \text{hay} \quad -2x+y+3z-5=0.$$

Mặt phẳng (β') đi qua $M_0(1;1;2)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{\beta'}}=\left[\overrightarrow{M_0N'_0},\overrightarrow{u'}\right]$.

Ta có $\overrightarrow{M_0N'_0}=(-3\ ;-1\ ;0)$, $\overrightarrow{u'}=(2\ ;2\ ;4)$, suy ra

$$\left[\overrightarrow{M_0N'_0},\vec{u}'\right] = \left(\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & -3\\ 4 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}\right) = (-4\ ;\ 12\ ;\ -4).$$

Ta chọn một vectơ pháp tuyến khác của (β') là $(1\ ;\ -3\ ;\ 1)$, từ đó (β') có phương trình là :

$$1(x-1) - 3(y-1) + 1(z-2) = 0 \quad \text{hay} \quad x - 3y + z = 0.$$

Dễ thấy rằng đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng

$$-2x + y + 3z - 5 = 0 \quad \text{và} \quad x - 3y + z = 0$$

thoả mãn bài toán. Do đó, phương trình tham số của d là

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = t. \end{cases}$$

Dễ thấy d cắt cả Δ và Δ'.

e) $d(\Delta, \Delta') = \dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{u}'\right].\overrightarrow{N_0N'_0}\right|}{\left|\left[\vec{u},\vec{u}'\right]\right|} = \dfrac{20}{\sqrt{21}}.$

g) Gọi đường vuông góc chung của Δ và Δ' là δ. Khi đó, vectơ chỉ phương của δ là $\overrightarrow{u_\delta} = \dfrac{1}{2}\left[\vec{u},\vec{u}'\right] = (4\,;-2\,;-1).$

Gọi (β_1) là mp(Δ, δ) thì (β_1) đi qua N_0 và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = \left[\vec{u},\overrightarrow{u_\delta}\right] = (-2\,;1\,;-10)$. Vậy phương trình của (β_1) là

$$-2(x-3) + 1(y+1) - 10(z-4) = 0 \text{ hay } 2x - y + 10z - 47 = 0.$$

Gọi (β_2) là mp(Δ', δ) thì (β_2) đi qua N'_0 và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2} = \left[\vec{u}',\overrightarrow{u_\delta}\right] = (6\,;18\,;-12)$. Vậy (β_2) có phương trình là

$$(\beta_2) : x + 3y - 2z + 6 = 0.$$

Do đó, đường vuông góc chung δ của Δ và Δ' là giao tuyến của hai mặt phẳng :

$$2x - y + 10z - 47 = 0 \text{ và } x + 3y - 2z + 6 = 0.$$

Phương trình tham số của δ là $\begin{cases} x = \dfrac{23}{7} - 4t \\ y = -\dfrac{3}{7} + 2t \\ z = 4 + t. \end{cases}$

93. a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2 ; 3 ; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (7 ; 0 ; -7)$, suy ra

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-21 ; 7 ; -21).$$

Lại có $\overrightarrow{AD} = (0 ; 7 ; -7)$ nên $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = 49 + 147 \neq 0.$

Do đó A, B, C, D là các đỉnh của một tứ diện.

b) $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right| = \dfrac{196}{6} = \dfrac{98}{3}.$

c) Gọi $I(x ; y ; z)$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện, ta có :

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $x = -2, y = 1, z = -5$. Vậy $I = (-2 ; 1 ; -5)$ và $R = IA = 7$.

Do đó, mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có phương trình :

$$(S) : (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 5)^2 = 49.$$

d) Dạng tham số của đường thẳng d là : $\begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = -11 + 5t \\ z = 9 - 4t. \end{cases}$

Toạ độ $(x ; y ; z)$ của giao điểm của d và (S) thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = -11 + 5t \\ z = 9 - 4t \\ (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 5)^2 = 49 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3t-3)^2 + (5t-12)^2 + (-4t+14)^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 3. \end{array}\right.$$

Khi $t = 2$ thì $x = 1$; $y = -1$; $z = 1$, ta được điểm $M(1 ; -1 ; 1)$.

Khi $t = 3$ thì $x = 4$; $y = 4$; $z = -3$, ta được điểm $N(4 ; 4 ; -3)$.

Vậy d cắt (S) tại hai điểm $M(1 ; -1 ; 1)$ và $N(4 ; 4 ; -3)$.

e) Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại M. Khi đó, (P) đi qua điểm $M(1 ; -1 ; 1)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{IM} = (3 ; -2 ; 6)$.

Vậy phương trình của (P) là : $3(x-1) - 2(y+1) + 6(z-1) = 0$ hay

$$3x - 2y + 6z - 11 = 0.$$

Gọi (Q) là mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại N. Khi đó, mp(Q) đi qua điểm $N(4 ; 4 ; -3)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q} = \overrightarrow{IN} = (6 ; 3 ; 2)$.

Vậy phương trình của (Q) là : $6(x-4) + 3(y-4) + 2(z+3) = 0$ hay

$$6x + 3y + 2z - 30 = 0.$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q), ta có

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|\left|\overrightarrow{n_Q}\right|} = \frac{|18 - 6 + 12|}{\sqrt{9+4+36}.\sqrt{36+9+4}} = \frac{24}{49}.$$

94. Ta chọn hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc là đỉnh A, tia Ox chứa AB, tia Oy chứa AD và tia Oz chứa AA' (h.105). Khi đó :

$A = (0 ; 0 ; 0)$ $\quad$ $A' = (0 ; 0 ; a)$

$B = (a ; 0 ; 0)$ $\quad$ $B' = (a ; 0 ; a)$

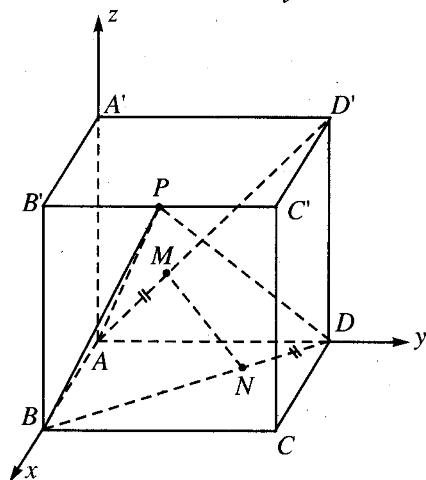
$D = (0 ; a ; 0)$ $\quad$ $D' = (0 ; a ; a)$

$C = (a ; a ; 0)$ $\quad$ $C' = (a ; a ; a)$

$P = \left(a ; \frac{a}{2} ; a\right)$

a) Ta có $\overrightarrow{AP} = \left(a ; \frac{a}{2} ; a\right)$,

$\overrightarrow{BC'} = (0 ; a ; a)$.



Hình 105

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AP và BC', ta có :

$$\cos\alpha = \frac{\left|0 + \frac{a^2}{2} + a^2\right|}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} + a^2}.\sqrt{a^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^o.$$

b) Ta có : $\overrightarrow{AP} = \left(a\ ;\ \frac{a}{2}\ ;\ a\right)$, $\overrightarrow{AB} = (a\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $\overrightarrow{AC'} = (a\ ;\ a\ ;\ a)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}\right] = \left(\begin{vmatrix} \frac{a}{2} & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & \frac{a}{2} \\ a & 0 \end{vmatrix}\right) = \left(0\ ;\ a^2\ ;\ -\frac{a^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}\right].\overrightarrow{AC'} = 0 + a^3 - \frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{2}.$$

Vậy $V_{APBC'} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}\right].\overrightarrow{AC'}\right| = \frac{1}{6}.\frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{12}.$

c) Mặt phẳng $(A'D'CB)$ song song với trục Oy nên có phương trình :

$$px + qz + n = 0 \qquad (n \neq 0, p^2 + q^2 > 0).$$

Vì mặt phẳng này đi qua A', B, C nên ta xác định được $p = q$ và $n = -pa$.

Cho $p = 1$, ta được phương trình mp$(A'D'CB)$ là $x + z - a = 0$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng này là $\vec{n} = (1\ ;\ 0\ ;\ 1)$.

Từ giả thiết $M \in AD'$, $N \in DB$; $AM = DN = k$, ta tính được :

$$M = \left(0\ ;\ \frac{k}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{k}{\sqrt{2}}\right), N = \left(\frac{k}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{a\sqrt{2} - k}{\sqrt{2}}\ ;0\right).$$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{k}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{a\sqrt{2} - 2k}{\sqrt{2}}\ ;\ -\frac{k}{\sqrt{2}}\right).$

Ta có $\overrightarrow{MN}.\vec{n} = 1.\frac{k}{\sqrt{2}} + 0\left(\frac{a\sqrt{2} - 2k}{\sqrt{2}}\right) + 1.\left(-\frac{k}{\sqrt{2}}\right) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \vec{n}.$

Rõ ràng $N \notin$ mp$(A'D'CB)$. Suy ra MN song song với mp$(A'D'CB)$.

d) Ta có $MN^2 = \left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2} - 2k}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2$

$$= 3k^2 - 2a\sqrt{2}\,k + a^2$$

$$= 3\left[\left(k - \frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{9}\right] \geq 3\frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{3}.$$

MN^2 nhỏ nhất bằng $\frac{a^2}{3}$ khi $k = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ (thoả mãn điều kiện $0 < k < a\sqrt{2}$).

Vậy MN ngắn nhất bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ khi $k = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

e) Khi MN ngắn nhất thì $k = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. Khi đó $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{a}{3} ; \frac{a}{3} ; \frac{-a}{3}\right)$.

Ta lại có $\overrightarrow{AD'} = (0 ; a ; a)$, $\overrightarrow{DB} = (a ; -a ; 0)$ nên $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'} = 0, \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB} = 0$.

Vậy MN là đường vuông góc chung của AD' và DB.

Mặt khác $\overrightarrow{A'C} = (a ; a ; -a) = 3\overrightarrow{MN}$, chứng tỏ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{A'C}$ cùng phương.

Do $N \notin A'C$ nên $MN \,//\, A'C$.

95. a) Mặt phẳng (ABC) có phương trình theo đoạn chắn là $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$ nên có phương trình tổng quát

$$3x + 2y + 2z - 6 = 0.$$

Mặt phẳng này có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3 ; 2 ; 2)$.

Mặt phẳng $(A'B'C')$ có phương trình theo đoạn chắn là $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1$ nên có phương trình tổng quát

$$2x + 3y + 3z - 12 = 0.$$

Mặt phẳng này có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n'} = (2 ; 3 ; 3)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng đó, ta có

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{n'}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\overrightarrow{n'}\right|} = \frac{|6 + 6 + 6|}{\sqrt{17}.\sqrt{22}} = \frac{18}{\sqrt{374}}.$$

b) Gọi Δ là giao tuyến của (ABC) và $(A'B'C')$. Điểm $M(x; y; z) \in \Delta$ nên toạ độ của M là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z - 6 = 0 \\ 2x + 3y + 3z - 12 = 0. \end{cases}$$

Cho $z = 0$, ta tính được $x = -\frac{6}{5}, y = \frac{24}{5}$.

Vậy điểm $I\left(-\frac{6}{5} ; \frac{24}{5} ; 0\right)$ thuộc Δ và vectơ chỉ phương của Δ là

$$\overrightarrow{u_\Delta} = \frac{1}{5}\left[\vec{n}, \overrightarrow{n'}\right] = (0 ; -1 ; 1).$$

Gọi d là khoảng cách từ O tới Δ, ta có : $d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{u_\Delta}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|}$.

Vì $\overrightarrow{OI} = \left(-\frac{6}{5} ; \frac{24}{5} ; 0\right)$, $\left[\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{u_\Delta}\right] = \left(\frac{24}{5} ; \frac{6}{5} ; \frac{6}{5}\right)$ nên

$$d(O ; \Delta) = \frac{\sqrt{\left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{18}{5}.$$

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có $G = \left(\frac{2}{3} ; 1 ; 1\right)$. Vectơ pháp tuyến của mp($A'B'C'$) là $\overrightarrow{n'} = (2 ; 3 ; 3) = 3\overrightarrow{OG}$. Vậy đường thẳng OG vuông góc với mp($A'B'C'$).

Mặt khác, tứ diện $OA'B'C'$ vuông tại O nên trực tâm H' của tam giác $A'B'C'$ là hình chiếu vuông góc của O trên mp($A'B'C'$). Do đó, O, G, H' thẳng hàng.

Để xác định toạ độ của H', ta giải hệ

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 3t \\ 2x + 3y + 3z - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{6}{11} \Rightarrow H' = \left(\frac{12}{11} ; \frac{18}{11} ; \frac{18}{11}\right).$$

d) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mp(ABC). Toạ độ của H thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 2t \\ 3x + 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{6}{17} \Rightarrow H = \left(\frac{18}{17} ; \frac{12}{17} ; \frac{12}{17}\right).$$

Gọi O' là điểm đối xứng của O qua mp(ABC). Vì H là trung điểm của OO' nên $O' = \left(\frac{36}{17} ; \frac{24}{17} ; \frac{24}{17}\right)$.

Thay toạ độ của O' vào phương trình mp($A'B'C'$), ta thấy không thoả mãn, vậy O' không thuộc mp($A'B'C'$).

e) Giả sử (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$.

Vì $A, A', B, C \in (S)$ nên ta có hệ :

$$\begin{cases} 4 + 4a + d = 0 \\ 36 + 12a + d = 0 \\ 9 + 6b + d = 0 \\ 9 + 6c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = c = -\frac{7}{2} \\ d = 12. \end{cases}$$

Vậy (S) có phương trình : $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 7y - 7z + 12 = 0$.

(S) có tâm $K = \left(4 ; \frac{7}{2} ; \frac{7}{2}\right)$ và $R = \frac{\sqrt{114}}{2}$.

Toạ độ B', C' cũng thoả mãn (S) nên mặt cầu (S) cũng đi qua B', C'.

g) Gọi (α) là mặt phẳng song song với (Oxy) có phương trình $z + D = 0$ ($D \neq 0$). Khi đó (α) tiếp xúc với (S) khi và chỉ khi $d(K, (\alpha)) = R$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{7}{2} + D\right| = \frac{\sqrt{114}}{2} \Rightarrow D = -\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{114}}{2}.$$

Vậy có hai mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu (S) và song song với mp(Oxy) là :

$$z - \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{114}}{2} = 0.$$

Bài tập trắc nghiệm

1. (A), **2.** (C), **3.** (B), **4.** (C), **5.** (D), **6.** (B),
7. (A), **8.** (D), **9.** (B), **10.** (A), **11.** (B), **12.** (C),
13. (D), **14.** (A), **15.** (A), **16.** (A), **17.** (B), **18.** (C),
19. (C), **20.** (D), **21.** (A), **22.** (B), **23.** (A), **24.** (B),
25. (D), **26.** (B), **27.** (C), **28.** (A), **29.** (A), **30.** (B),
31. (D), **32.** (D).

ÔN TẬP CUỐI NĂM

A. ĐỀ BÀI

1. Có hay không một khối đa diện gồm một số lẻ mặt mà mỗi mặt có một số lẻ cạnh ?

2. Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b và hai đường thẳng chéo nhau a', b'. Biết rằng :

i) Khoảng cách giữa a và b bằng khoảng cách giữa a' và b'.

ii) Góc hợp bởi a và b bằng góc hợp bởi a' và b'.

Chứng minh rằng có phép dời hình biến a thành a', biến b thành b'.

3. Xét hình lăng trụ tam giác đều với chiều cao h, nội tiếp một mặt cầu bán kính R ($h < 2R$) (tức sáu đỉnh của hình lăng trụ nằm trên mặt cầu đó).

a) Tính cạnh đáy của hình lăng trụ.

b) Tính thể tích của khối lăng trụ.

c) Tính h theo R để mỗi mặt bên của hình lăng trụ là hình vuông.

4. Cho tam giác cân ABC, $AB = AC$. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A (M không trùng với điểm A).

a) Tìm quỹ tích trọng tâm G và trực tâm H của tam giác MBC.

b) Gọi O là trực tâm của tam giác ABC, hãy xác định vị trí của điểm M để thể tích khối tứ diện $OHBC$ đạt giá trị lớn nhất.

5. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng h và hai đường thẳng AB' và BC' vuông góc với nhau.

a) Gọi M' là trung điểm của $A'B'$. Chứng minh rằng $AB' \perp BM'$.

b) Tính độ dài đoạn thẳng $A'B'$ theo h.

c) Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Một mặt phẳng đi qua CD cắt các cạnh SA, SB lần lượt tại M, N. Đặt $AM = x$.

a) Tứ giác $MNCD$ là hình gì ? Tính diện tích tứ giác $MNCD$ theo a, x.

b) Xác định giá trị của x để thể tích của hình chóp $S.MNCD$ bằng $\frac{2}{9}$ lần thể tích hình chóp $S.ABCD$.

7. Trong không gian cho các điểm A, B, C lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một sao cho $OA = a$ $(a > 0)$, $OB = a\sqrt{2}$, $OC = c$ $(c > 0)$. Gọi D là đỉnh đối diện với O của hình chữ nhật $AOBD$ và M là trung điểm của đoạn BC. (P) là mặt phẳng đi qua AM và cắt mặt phẳng (OCD) theo một đường thẳng vuông góc với đường thẳng AM.

a) Gọi E là giao điểm của (P) với đường thẳng OC, tính độ dài đoạn thẳng OE.

b) Tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện được tạo thành khi cắt khối chóp $C.AOBD$ bởi mặt phẳng (P).

c) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (P).

8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân, $AB = AC = a$; mp$(SBC) \perp$ mp(ABC) và $SA = SB = a$;

1. Chứng minh rằng SBC là tam giác vuông.

2. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ biết $SC = \frac{3a}{2}$.

9. Cho hình chóp $S.ABC$. Biết rằng các điểm A, B, C và các trung điểm A', B', C' của các cạnh SA, SB, SC cùng thuộc một mặt cầu bán kính R.

1. Chứng minh rằng tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ thuộc đường cao SH của hình chóp.

2. Cho góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^o, chứng minh rằng H là tâm của mặt cầu đi qua sáu điểm A, B, C, A', B', C'.

Khi đó, hãy tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

10. Cho tam giác ABC vuông ở A, $AB = c, AC = b$. Trên đường thẳng d vuông góc với mp(ABC) tại A, lấy điểm S bất kì, $S \neq A$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC.

1. Xác định tâm của mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, B_1, C_1 và tính bán kính của mặt cầu đó.

2. Cho $SA = h$, tính tỉ số thể tích của hai tứ diện SAB_1C_1 và $SABC$.

11. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R, trục là OO'. Gọi MN là dây cung thay đổi của đường tròn tâm O sao cho $MN = R$. Kí hiệu N' là hình chiếu

của N trên mặt phẳng chứa đường tròn tâm O'. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của OO' và MN'.

1. Chứng minh rằng IJ là đường vuông góc chung của OO' và MN', và độ dài IJ không đổi.

2. Chứng minh rằng mp(MNN') luôn tiếp xúc với một mặt trụ $\mathcal{T}$ cố định (tức giao của chúng là một đường sinh của $\mathcal{T}$).

12. Cho hình nón tròn xoay đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O. Gọi A là điểm cố định và M là điểm thay đổi cùng thuộc đường tròn đáy hình nón. Đặt $\widehat{AOM} = \alpha$. Gọi β là góc giữa mp(SAM) và mặt phẳng chứa đáy hình nón ; khoảng cách từ O đến mp(SAM) bằng a.

1. Tính thể tích khối nón đã cho theo a, α, β.

2. Xác định điểm M để tam giác SAM có diện tích lớn nhất.

3. Chứng minh rằng hình chiếu H của điểm O trên mp(SAM) thuộc một đường tròn cố định.

13. Trong không gian $Oxyz$ cho bốn điểm $A(1 ; 0 ; 2)$, $B(1 ; 1 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 1)$ và $D(1 ; 1 ; 1)$.

1. Chứng minh A, B, C, D là bốn đỉnh của một khối tứ diện.

2. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

3. Viết phương trình đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D.

4. Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

5. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại đỉnh A.

6. Xác định toạ độ của điểm A' đối xứng với điểm A qua mp(BCD).

7. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD.

14. Trong không gian $Oxyz$ cho mp(P) : $x + 2y - z + 5 = 0$ và đường thẳng

$$d : \frac{x+1}{2} = y + 1 = z - 3.$$

1. Tìm toạ độ giao điểm A của d và (P).

2. Tính góc α giữa đường thẳng d và mp(P).

3. Viết phương trình mp(Q) chứa đường thẳng d và vuông góc với mp(P).

4. Viết phương trình hình chiếu vuông góc d' của d trên mp(P).

5. Viết phương trình đường thẳng nằm trong mp(P) chứa A và vuông góc với đường thẳng d.

6. Viết phương trình mặt cầu có tâm I nằm trên đường thẳng d, tiếp xúc với mp(P) và có bán kính $R = \sqrt{6}$.

7. Viết phương trình mp(R) chứa đường thẳng d và tạo với mp(P) một góc nhỏ nhất.

15. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(3 ; 3 ; 1)$, $B(0 ; 2 ; 1)$ và mặt phẳng

$$(P) : x + y + z - 7 = 0.$$

1. Viết phương trình đường thẳng AB.

2. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của AB trên mp(P).

3. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mp(P) mà mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B.

4. Viết phương trình đường vuông góc chung của AB và d.

5. Tìm điểm K thuộc đường thẳng AB $(K \neq B)$ sao cho

$$d\big(K,(P)\big) = d\big(B,(P)\big).$$

6. Tìm điểm C trên đường thẳng d sao cho diện tích tam giác ABC nhỏ nhất.

16. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng

$$d_1 : x = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{2} \text{ và } d_2 : \frac{x+8}{2} = y - 6 = \frac{z-10}{-1}.$$

1. Chứng minh hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

2. Viết phương trình mặt phẳng chứa d_2 và song song với d_1.

3. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2.

4. Viết phương trình đường thẳng d song song với trục Ox, cắt d_1 tại M, cắt d_2 tại N. Tìm toạ độ các điểm M, N.

5. Gọi AB là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 $(A \in d_1, B \in d_2)$. Hãy viết phương trình mặt cầu đường kính AB.

17. Trong không gian $Oxyz$ cho tứ diện $OABC$ với $A(a ; 0 ; 0)$, $B(0 ; b ; 0)$, $C(0 ; 0 ; c)$, $a, b, c > 0$.

1. Chứng minh tam giác ABC có ba góc đều nhọn.

2. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

3. Kẻ $OH \perp mp(ABC)$, $H \in mp(ABC)$. Tìm toạ độ điểm H theo a, b, c.

4. Xác định toạ độ điểm O' đối xứng với điểm O qua mp(ABC).

5. Kí hiệu $S = S_{ABC}$, $S_1 = S_{OAB}$, $S_2 = S_{OBC}$, $S_3 = S_{OCA}$.

Chứng minh $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.

6. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm AB, BC, CA. Chứng minh rằng :

$$mp(OMN) \perp mp(OMP) \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}.$$

7. Chứng minh rằng với mọi điểm P trên mp(ABC), ta đều có :

$$\frac{AP^2}{AO^2} + \frac{BP^2}{BO^2} + \frac{CP^2}{CO^2} = \frac{HP^2}{HO^2} + 2.$$

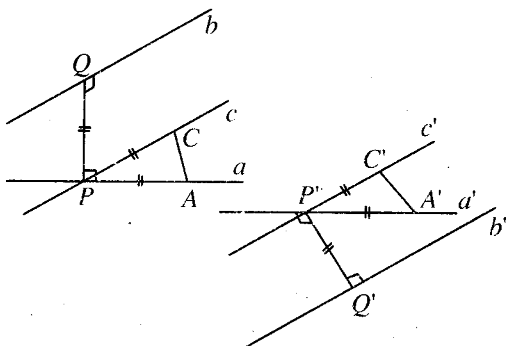
B - LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

1. Giả sử tồn tại một khối đa diện $\mathcal{H}$ gồm k mặt và c cạnh thoả mãn yêu cầu của bài toán. Gọi c_1 là số cạnh của mặt thứ nhất, c_2 là số cạnh của mặt thứ hai, ..., c_k là số cạnh của mặt thứ k. Theo giả thiết thì $k, c_1, c_2, ..., c_k$ là những số lẻ. Vì mỗi cạnh thuộc đúng hai mặt nên ta có :

$$c_1 + c_2 + ... + c_k = 2c.$$

Điều này là vô lí vì vế trái của đẳng thức trên là một số lẻ, còn vế phải là một số chẵn. Vậy không có khối đa diện nào thoả mãn yêu cầu của bài toán.

2. (h.106) Gọi PQ là đường vuông góc chung của a và b, trong đó $P \in a$, $Q \in b$. Gọi $P'Q'$ là đường vuông góc chung của a' và b', trong đó $P' \in a'$, $Q' \in b'$. Theo giả thiết $PQ = P'Q'$.



Hình 106

Gọi c là đường thẳng đi qua P và song song với b, c' là đường thẳng đi qua P' và song song với b'. Theo giả thiết, góc giữa a và c bằng góc giữa a' và c'.

Lấy lần lượt trên a và c các điểm A, C sao cho $PA = PC = PQ$, rồi lấy lần lượt trên a' và c' các điểm A', C' sao cho $P'A' = P'C' = P'Q'$ và góc $\widehat{APC}$ bằng góc $\widehat{A'P'C'}$. Từ đó, dễ thấy hai tứ diện $PQAC$ và $P'Q'A'C'$ có các cạnh tương ứng bằng nhau.

Vậy có một phép dời hình f biến tứ diện $PQAC$ thành tứ diện $P'Q'A'C'$. Khi đó, f biến hai đường thẳng a, b lần lượt thành hai đường thẳng a' và b'.

3. (h.107).

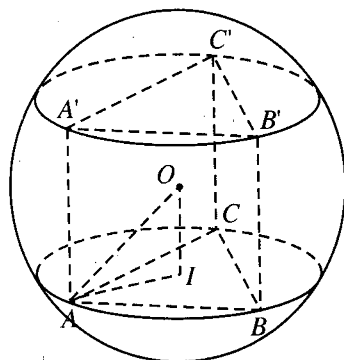
a) Gọi O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ, I là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Khi đó ta có : $OA = OB = OC = R, OI = \frac{1}{2}h$. Tam giác OAI vuông tại I nên $AI^2 = OA^2 - OI^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$.

IA là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC nên

$$AB = IA\sqrt{3} = \sqrt{3\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)}.$$

Vậy cạnh đáy của hình lăng trụ bằng

$$\frac{1}{2}\sqrt{3(4R^2 - h^2)}.$$



Hình 107

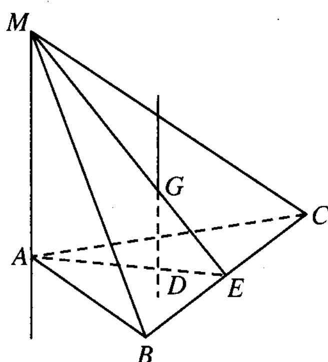
b) Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là :

$$V = S_{ABC}.h = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}h = \frac{3\sqrt{3}}{16}(4R^2 - h^2)h.$$

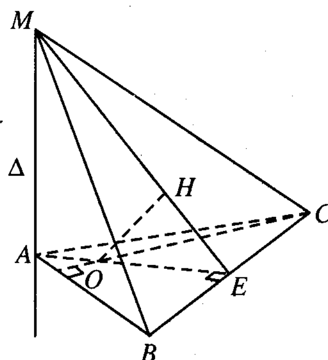
c) Mỗi mặt bên của hình lăng trụ là hình vuông khi và chỉ khi $AB = h$, tức $\frac{1}{2}\sqrt{3(4R^2 - h^2)} = h \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{12}{7}}R$ (để ý rằng $\sqrt{\frac{12}{7}} < 2$).

4. a) Nếu gọi E là trung điểm của BC (h.108a) thì trọng tâm G của tam giác MBC xác định bởi $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EM}$. Từ đó, khi M vạch đường thẳng Δ vuông góc với mp(ABC) tại A ($M \neq A$) thì G vạch đường thẳng Δ' vuông góc với mp(ABC) tại trọng tâm D của tam giác ABC (trừ điểm D).

Do $AB = AC$ nên các tam giác vuông MAB, MAC bằng nhau, vậy ME và AE cùng vuông góc với BC. Từ đó trực tâm H của tam giác MBC thuộc ME (h.108b).



a)



b)

Hình 108

Trong mặt phẳng (AME), đường thẳng vuông góc với ME tại trực tâm H của tam giác MBC cắt AE tại O thì do $BC \perp (AEM)$ nên $BC \perp OH$, từ đó $OH \perp (MBC)$.

Ta có $BM \perp CH$ mà $BM \perp OH$ nên $BM \perp (OHC)$, do đó $OC \perp BM$, nhưng $OC \perp AM$ nên $OC \perp (ABM)$. Vậy $OC \perp AB$.

Điểm O thuộc đường cao OC và đường cao AE của tam giác ABC nên O là trực tâm của tam giác ABC.

Như vậy, khi $M \in \Delta$ $(M \neq A)$ thì H là trực tâm của tam giác MBC khi và chỉ khi H là hình chiếu của trực tâm O của tam giác ABC trên ME.

Vậy quỹ tích của H là đường tròn đường kính OE (bỏ hai điểm O, E) trong mặt phẳng trung trực của BC.

b) (h.108b).

$V_{OHBC} = 2V_{OHBE} = \frac{2}{3}S_{OHE}.BE$ (vì (OHE) là mặt phẳng trung trực của BC)

nên V_{OHBC} lớn nhất khi và chỉ khi S_{OHE} lớn nhất.

Tam giác vuông OHE có cạnh huyền OE cố định nên có diện tích lớn nhất khi và chỉ khi tam giác đó vuông cân, tức $\widehat{HEO} = 45^o$ hay $AM = AE$.

Vậy có hai vị trí của M trên Δ để V_{OHBC} đạt cực đại, đó là các điểm M sao cho $AM = AE$.

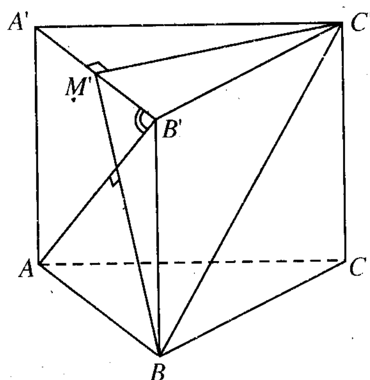
5. (h.109)

a) Ta có $C'M' \perp A'B'$, $C'M' \perp AA' \Rightarrow C'M' \perp (ABB'A') \Rightarrow C'M' \perp AB'$.

Mặt khác, theo giả thiết $BC' \perp AB'$, suy ra $AB' \perp$ mp$(BC'M')$.

Do đó $AB' \perp BM'$.

b) Từ kết quả của câu a), ta dễ dàng suy ra $\Delta BB'M' \backsim \Delta B'A'A$



Hình 109

$\Rightarrow \dfrac{A'B'}{BB'} = \dfrac{A'A}{B'M'}$

$\Rightarrow A'B'.B'M' = A'A.BB'$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}A'B'^2 = h^2$

$\Rightarrow A'B' = h\sqrt{2}$.

c) $V_{ABC.A'B'C'} = S_{A'B'C'}.AA' = \left(h\sqrt{2}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}h^3$.

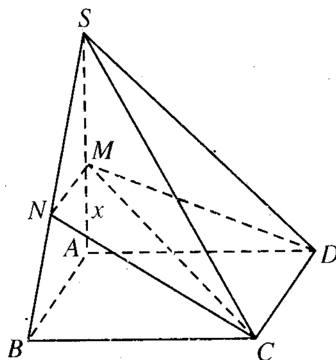
6. (h.110). a) Do $AB//CD$, $AB \subset (SAB)$, $CD \subset (MNCD)$ nên hai mặt phẳng (SAB) và $(MNCD)$ cắt nhau theo giao tuyến MN song song với AB và CD.

Mặt khác $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp DM$.

Vậy $MNCD$ là hình thang vuông.

Vì $MN//AB$ nên ta có $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{SM}{SA}$.

Vậy $MN = \dfrac{AB.SM}{SA} = \dfrac{a.SM}{a} = SM = a - x$.



Hình 110

$S_{MNCD} = \dfrac{1}{2}(MN + CD).DM$

$= \dfrac{1}{2}(a - x + a)\sqrt{a^2 + x^2}$

$= \dfrac{1}{2}(2a - x)\sqrt{a^2 + x^2}$.

b) $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \dfrac{1}{3}a^3 \Rightarrow V_{S.ACD} = V_{S.ACB} = \dfrac{1}{6}a^3$.

$V_{S.MNCD} = V_{S.MNC} + V_{S.MCD}$.

Mặt khác

$$\frac{V_{S.MCN}}{V_{S.ACB}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SC}{SC}.\frac{SN}{SB}=\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{V_{S.MCN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}\left(\frac{a-x}{a}\right)^2.$$

$$\frac{V_{S.MCD}}{V_{S.ACD}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SC}{SC}.\frac{SD}{SD}=\frac{SM}{SA}=\frac{a-x}{a} \Rightarrow \frac{V_{S.MCD}}{V_{S.ABCD}}=\frac{a-x}{2a}.$$

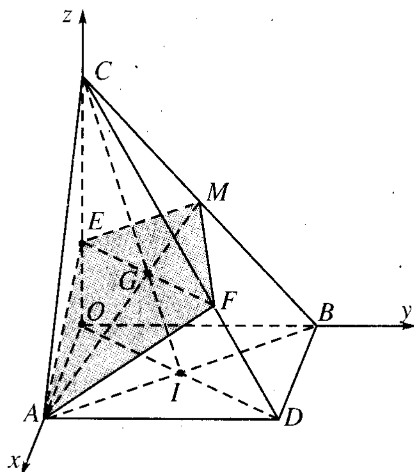
$$\frac{V_{S.MNCD}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.MCN}+V_{S.MCD}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.MCN}}{V_{S.ABCD}}+\frac{V_{S.MCD}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}\left(\frac{a-x}{a}\right)^2+\frac{a-x}{2a}.$$

Từ đó ta có $\frac{V_{S.MNCD}}{V_{S.ABCD}}=\frac{2}{9} \Leftrightarrow 9x^2-27ax+14a^2=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{7}{3}a \text{ (loại vì theo giả thiết } x<a) \\ x=\frac{2}{3}a. \end{array}\right.$$

7. (h.111).

a) *Cách 1*. Giả sử I là giao điểm của OD và AB, F là giao điểm của mp(P) với CD. Khi đó dễ thấy ba đường thẳng EF, AM và CI đồng quy tại trọng tâm G của tam giác ABC.



Hình 111

Đặt $\overrightarrow{OE}=k.\overrightarrow{OC}$.

Từ giả thiết $GA \perp GE$, ta có $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GE}=0$.

Mặt khác $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GE}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG}).(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OG})$

$$=\left[\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\right].\left[k.\overrightarrow{OC}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\right]$$

$$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}^2+\frac{1}{9}\overrightarrow{OA}^2+\frac{1}{9}\overrightarrow{OB}^2+\frac{1}{9}\overrightarrow{OC}^2-\frac{1}{3}k\overrightarrow{OC}^2$$

(vì $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}=0$)

$$=-\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{9}a^2+\frac{2}{9}a^2+\frac{1}{9}c^2-\frac{k}{3}c^2 \text{ (vì } OA=a,\ OB=a\sqrt{2},\ OC=c).$$

Vậy $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GE}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{9}c^2-\frac{k}{3}c^2=0 \Leftrightarrow k=\frac{1}{3}$. Vậy $OE=\frac{1}{3}c$.

Cách 2. Chọn hệ toạ độ Đề-các vuông góc $Oxyz$ như hình 111 thì

$A = (a\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B = \left(0\ ;\ a\sqrt{2}\ ;\ 0\right)$, $D = (a\ ;\ a\sqrt{2}\ ;\ 0)$, $C = (0\ ;\ 0\ ;\ c)$,

$M = \left(0\ ;\ \frac{a\sqrt{2}}{2}\ ;\ \frac{c}{2}\right)$. Sử dụng giả thiết của bài toán, ta lập được phương trình của mặt phẳng (P) là

$$c\sqrt{2}(x-a) - cy + 3a\sqrt{2}z = 0.$$

Giao điểm của (P) với trục Oz là $E = \left(0\ ;\ 0\ ;\ \frac{c}{3}\right)$, suy ra $OE = \frac{c}{3}$.

b) Vì $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$, giao tuyến EF của (P) với (OCD) song song với OD nên $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$. Ta có

$$\frac{V_{C.AEF}}{V_{C.AOD}} = \frac{CE}{CO}.\frac{CF}{CD} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9},$$

$$\frac{V_{C.MEF}}{V_{C.BOD}} = \frac{CM}{CB}.\frac{CE}{CO}.\frac{CF}{CD} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Vậy $V_{C.AEMF} = \left(\frac{4}{9} + \frac{2}{9}\right)\frac{1}{2}V_{C.AOBD} = \frac{1}{3}V_{C.AOBD}$, từ đó $\frac{V_{C.AEMF}}{V_{AEMFDBO}} = \frac{1}{2}$.

c) *Cách 1*. Tứ giác lồi $AEMF$ có các đường chéo AM, EF vuông góc nên có diện tích :

$$S_{AEMF} = \frac{1}{2}AM.EF$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{AO^2 + OJ^2 + JM^2}\,.\frac{2}{3}OD \quad (J \text{ là trung điểm của } OB)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{4}}\ .\ \frac{2}{3}\sqrt{a^2 + 2a^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}a\sqrt{6a^2 + c^2}\ .$$

Vậy khoảng cách từ C đến mp(P) là

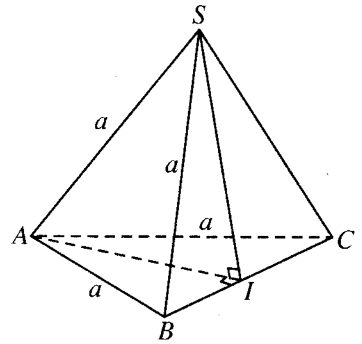
$$d(C\ ,\ (P)) = \frac{3V_{C.AEMF}}{S_{AEMF}} = \frac{a^2c\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{6}a\sqrt{6a^2 + c^2}} = \frac{2ac\sqrt{6}}{3\sqrt{6a^2 + c^2}}.$$

Cách 2. Sử dụng cách 2 của câu a), ta tính được khoảng cách từ điểm $C(0\ ;\ 0\ ;\ c)$ đến mp(P) có phương trình $c\sqrt{2}(x-a)-cy+3a\sqrt{2}z=0$ là

$$d(C,(P))=\frac{\left|-ac\sqrt{2}+3ac\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2c^2+c^2+18a^2}}=\frac{2ac\sqrt{6}}{3\sqrt{c^2+6a^2}}.$$

8. (h.112a)

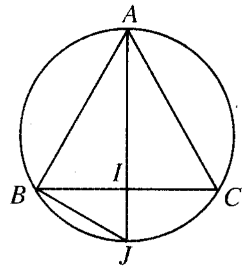
1. Gọi I là trung điểm của BC, ta có $AI \perp BC$. Do $(SBC) \perp (ABC)$ nên $AI \perp$ mp(SBC), suy ra ΔSAI vuông tại I.



Hình 112a

Các tam giác vuông SAI, BAI có IA chung, $AB = AS$, do đó $IB = IS$, mặt khác $IB = IC$, suy ra tam giác SBC vuông ở S.

2. Vì $IB = IC = IS$ và $AI \perp (SBC)$ nên tâm O của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ thuộc đường thẳng AI, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác cân ABC và bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$ cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Hình 112b

Gọi J là giao điểm thứ hai của AI (h.112b) và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $AJ = 2R$ và $AB^2 = AI.AJ$ hay $a^2 = AI.2R$

$$\Rightarrow R = \frac{a^2}{2AI}. \qquad (1)$$

Mặt khác

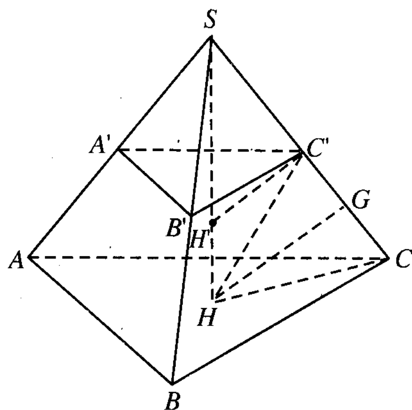
$$BC^2 = SB^2 + SC^2 = a^2 + \frac{9a^2}{4} = \frac{13a^2}{4}$$

và $AI^2 = AB^2 - BI^2 = a^2 - \dfrac{BC^2}{4} = a^2 - \dfrac{13a^2}{16} = \dfrac{3a^2}{16} \Rightarrow AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. (2)

Thay (2) vào (1) ta có $R = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $\frac{4}{3}\pi.\frac{8a^3}{3\sqrt{3}} = \frac{32\pi a^3}{9\sqrt{3}}$.

9. (h.113)



Hình 113

1. Vì A, B, A', B' cùng thuộc một mặt cầu và $A'B'//AB$ nên $ABB'A'$ là hình thang cân, từ đó $SA = SB$. Lập luận tương tự ta có $SB = SC$.

Vậy $SA = SB = SC$.

Suy ra đường cao SH của hình chóp $S.ABC$ chính là trục của tam giác ABC. Do đó, tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ thuộc SH.

2. Ta sẽ chứng minh H chính là tâm của mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, A', B', C'. Thật vậy, do $SH \perp$ mp(ABC) nên $\widehat{SCH} = 60^\circ$, từ đó $HC = \frac{1}{2}SC$,

mặt khác $C'S = C'C$ nên $HC' = \frac{1}{2}SC$.

Từ chứng minh trên ta có $HA = HB = HC = HC' = HA' = HB'$, tức H là tâm của mặt cầu đi qua A, B, C, A', B', C'.

Gọi G là trung điểm của $C'C$ thì $HG \perp SC$. Kẻ $C'H'$ song song với GH $(H' \in SH)$ thì $H'S = H'C$, từ đó H' là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và $H'S$ là bán kính mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$.

Ta có $H'S^2 = H'C'^2 + SC'^2$, mặt khác

$$H'C' = \frac{2}{3}HG,\ HG = \frac{R\sqrt{3}}{2},\ SC' = \frac{SC}{2} = R.$$

Từ đó $H'S^2 = \left(\frac{2}{3}.\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + R^2 = \frac{R^2}{3} + R^2 = \frac{4R^2}{3}$.

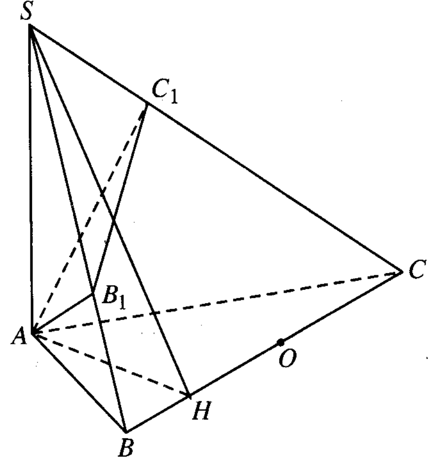
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $\frac{16\pi R^2}{3}$.

16-BTHH 12 - NC - B

10. (h.114)

1. Ta có $AC \perp mp(SAB)$ nên $AC \perp SB$, từ đó $SB \perp B_1C$ tức là $\widehat{BB_1C} = 90^o$.

Tương tự ta cũng có $\widehat{BC_1C} = 90^o$. Vậy tâm mặt cầu đi qua B, C, A, B_1, C_1 là trung điểm O của BC.



Hình 114

Ta có $AO = \frac{1}{2}BC$,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = b^2 + c^2.$$

Từ đó bán kính mặt cầu bằng $\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}$.

2. Ta có

$$\frac{V_{S.AB_1C_1}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB_1}{SB}.\frac{SC_1}{SC} = \frac{SB_1.SB}{SB^2}.\frac{SC_1.SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SB^2}.\frac{SA^2}{SC^2} = \frac{h^4}{\left(h^2+c^2\right)\left(h^2+b^2\right)}.$$

Vậy tỉ số thể tích của hai tứ diện SAB_1C_1 và $SABC$ bằng

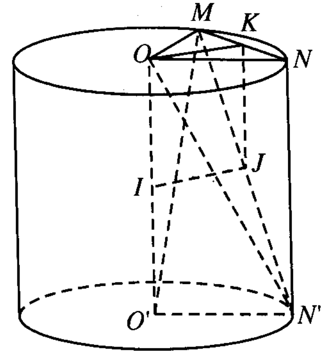
$$\frac{h^4}{\left(h^2+b^2\right)\left(h^2+c^2\right)}.$$

11. (h.115)

1. Hai tam giác vuông $OO'N'$ và $O'OM$ có OO' chung và $O'N' = OM$ nên chúng bằng nhau, từ đó $IM = IN'$. Mặt khác $JM = JN'$ nên $IJ \perp MN'$.

Cũng dễ thấy các tam giác OMN' và $O'N'M$ bằng nhau, từ đó $OJ = O'J$; mặt khác $IO = IO'$ nên $IJ \perp OO'$.

Vậy IJ là đường vuông góc chung của OO' và MN'.



Hình 115

Gọi K là trung điểm của MN thì $OK = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ và $IJ = OK$, tức là độ dài IJ không đổi.

2. Từ $IJ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ và $JI \perp OO'$ suy ra điểm J thuộc mặt trụ có trục là OO' và bán kính mặt trụ bằng $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Mặt khác từ $IJ \perp MN'$, $IJ \perp OO'$ suy ra $IJ \perp \text{mp}(MNN')$, tức là mp(MNN') tiếp xúc với mặt trụ cố định có trục là OO', bán kính $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

12. (h.116)

1. Gọi I là trung điểm của AM thì $OI \perp AM$ và $SI \perp AM$, từ đó $\widehat{SIO} = \beta$. Gọi H là hình chiếu của O trên SI thì $OH \perp \text{mp}(SAM)$, từ đó $OH = a$.

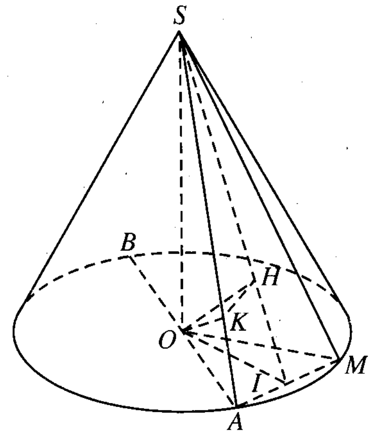
Ta có $OI = \frac{OH}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\beta}$.

$$OM = \frac{OI}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{\sin\beta\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

$$SO = OI\tan\beta = \frac{a}{\sin\beta}.\tan\beta = \frac{a}{\cos\beta}.$$

Từ đó thể tích khối nón đã cho là

$$V = \frac{\pi a^3}{3\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta\cos\beta}.$$



Hình 116

2. Ta có $S_{\Delta SAM} = \frac{1}{2}SA.SM\sin\widehat{ASM} = \frac{1}{2}SA^2\sin\widehat{ASM}$.

Vì SA không đổi nên $S_{\Delta SAM}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $\sin\widehat{ASM}$ lớn nhất.

Dễ thấy $\widehat{ASB} \geq \widehat{ASM}$ (B là điểm đối xứng của A qua O). Vậy có hai trường hợp :

a) $0 < \widehat{ASB} < 90^\circ$. Khi đó $\sin\widehat{ASM} \leq \sin\widehat{ASB}$, từ đó $\sin\widehat{ASM}$ lớn nhất khi và chỉ khi M trùng với B.

b) $90^\circ \leq \widehat{ASB} < 180^\circ$. Khi đó $\sin\widehat{ASM}$ lớn nhất khi và chỉ khi $\widehat{ASM} = 90^\circ$. Vậy có hai vị trí của M trên đường tròn đáy hình nón để diện tích tam giác SAM lớn nhất, đó là hai điểm M sao cho $\widehat{ASM} = 90^\circ$.

3. Vì $OH \perp$ mp(SAM) nên $OH \perp SA$. Vậy H thuộc mp(P) đi qua O và vuông góc với SA tại K. Ta có (P) là mặt phẳng cố định, ngoài ra $\widehat{OHK} = 90^o$, tức là H thuộc đường tròn đường kính OK trong mặt phẳng (P) nêu trên, tất nhiên đường tròn này cố định.

13. 1. $\overrightarrow{CA} = (1 ; 0 ; 1)$, $\overrightarrow{CB} = (1 ; 1 ; -1)$, $\overrightarrow{CD} = (1 ; 1 ; 0)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right] = (-1 ; 2 ; 1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right].\overrightarrow{CD} = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ A, B, C, D không đồng phẳng hay A, B, C, D là bốn đỉnh của một khối tứ diện.

2. $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right].\overrightarrow{CD}\right| = \frac{1}{6}$.

3. Vectơ chỉ phương của đường cao tứ diện hạ từ đỉnh D có thể lấy là vectơ pháp tuyến của mp(ABC) hay vectơ $\left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right] = (-1 ; 2 ; 1)$.

Vậy đường cao đó có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$.

4. Phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

Do A, B, C, D thuộc (S) nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a + 4c - d - 5 = 0 \\ 2a + 2b - d - 2 = 0 \\ 2c - d - 1 = 0 \\ 2a + 2b + 2c - d - 3 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ ta có : $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$, $d = 0$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x + y - z = 0.$$

Suy ra (S) có tâm là $I\left(\frac{3}{2} ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

5. Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A có vectơ pháp tuyến là

$$\overrightarrow{AI} = \left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} ; -\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 ; -1 ; -3).$$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là

$$(x - 1) - (y - 0) - 3(z - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y - 3z + 5 = 0.$$

6. Ta viết phương trình mp(BCD), đó là mặt phẳng đi qua $C(0 ; 0 ; 1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right] = (1 ; -1 ; 0)$.

Vậy mp(BCD) có phương trình : $x - y = 0$.

Đường thẳng qua A và vuông góc với mp(BCD) có phương trình là

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2. \end{cases}$$

Gọi K là giao điểm của đường thẳng này với mp(BCD), toạ độ của K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow K = \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 2\right).$$

Vì A' là điểm đối xứng với A qua mp(BCD) nên ta có

$$\begin{cases} x_{A'} + x_A = 2x_K \\ y_{A'} + y_A = 2y_K \\ z_{A'} + z_A = 2z_K \end{cases} \Rightarrow A' = (0 ; 1 ; 2).$$

7. Dễ dàng nhận thấy BD song song với mp(xOz) mà mp(xOz) chứa AC nên

$$d(AC, BD) = d(B, (xOz)) = 1.$$

14. 1. Phương trình tham số của d : $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + t. \end{cases}$

Toạ độ giao điểm A của đường thẳng d với mp(P) thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + t \\ x + 2y - z + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow A = \left(-\frac{1}{3} ; \frac{-2}{3} ; \frac{10}{3}\right).$$

2. Gọi α là góc giữa đường thẳng d và mp(P). d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(2 ; 1 ; 1)$, (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(1 ; 2 ; -1)$ nên

$$\sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{n_P}\right|} = \frac{|2 + 2 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}.\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^o.$$

3. Vì (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mp(P) nên mp(Q) chứa điểm $(-1 ; -1 ; 3) \in d$ và có vectơ pháp tuyến là

$$\left[\overrightarrow{n_d}, \overrightarrow{n_P}\right] = (-3 ; 3 ; 3)$$

Suy ra phương trình mp(Q) là : $x - y - z + 3 = 0$.

4. d' chính là đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). Vì vậy, điểm $(x ; y ; z) \in d'$ khi và chỉ khi $(x;y;z)$ thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x + 2y - z + 5 = 0 \\ x - y - z + 3 = 0, \end{cases}$$

hay d' có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{11}{3} + t \\ y = -\dfrac{2}{3} \\ z = t. \end{cases}$$

5. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong mp(P), đi qua điểm $A\left(-\dfrac{1}{3} ; -\dfrac{2}{3} ; \dfrac{10}{3}\right)$ và vuông góc với đường thẳng d. Khi đó, Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \dfrac{1}{3}\left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_P}\right] = (-1 ; 1 ; 1)$ nên Δ có phương trình chính tắc là

$$\frac{x + \frac{1}{3}}{-1} = y + \frac{2}{3} = z - \frac{10}{3}.$$

6. Vì $I \in d$ nên $I = (-1 + 2t ; -1 + t ; 3 + t)$.

Mặt cầu tâm I tiếp xúc với mp(P) và có bán kính $R = \sqrt{6}$ khi và chỉ khi $d\left(I,(P)\right) = \sqrt{6}$ hay

$$\frac{|-1 + 2t - 2 + 2t - 3 - t + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow |3t - 1| = 6 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3t - 1 = 6 \\ 3t - 1 = -6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{7}{3} \\ t = -\dfrac{5}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} I = \left(\dfrac{11}{3} ; \dfrac{4}{3} ; \dfrac{16}{3}\right) \\ I = \left(-\dfrac{13}{3} ; \dfrac{-8}{3} ; \dfrac{4}{3}\right). \end{array}\right.$$

Vậy có hai mặt cầu thoả mãn yêu cầu đặt ra là :

$$(S_1): \left(x-\frac{11}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2+\left(z-\frac{16}{3}\right)^2=6,$$

$$(S_2): \left(x+\frac{13}{3}\right)^2+\left(y+\frac{8}{3}\right)^2+\left(z-\frac{4}{3}\right)^2=6.$$

7. *Cách 1*. Ta tìm hai điểm phân biệt thuộc đường thẳng d.

Cho $t = 0$, ta được $M(-1 ; -1 ; 3) \in d$, $t = 1$, ta được $N(1 ; 0 ; 4) \in d$.

Giả sử mặt phẳng (R) cần tìm có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Vì $M, N \in$ mp(R) nên

$$\begin{cases} -A - B + 3C + D = 0 \\ A + 4C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -(2A + B) \\ D = 7A + 4B. \end{cases}$$

Do đó $\overrightarrow{n_R} = (A ; B ; -2A - B)$.

Ta có $\overrightarrow{n_P} = (1 ; 2 ; -1)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (R) và (P) $(0^\circ \le \varphi \le 90^\circ)$ thì :

$$\cos\varphi = \frac{|A + 2B + 2A + B|}{\sqrt{6}\sqrt{A^2 + B^2 + (2A + B)^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}}\frac{|A + B|}{\sqrt{5A^2 + 2B^2 + 4AB}}.$$

Trường hợp $A + B = 0$, ta có $\varphi = 90^\circ$ là góc lớn nhất trong các góc có thể có giữa hai mặt phẳng (P) và (R), loại.

Trường hợp $A + B \neq 0$, ta có

$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{(A + B)^2}{2(A + B)^2 + 3A^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}}.\sqrt{\frac{1}{2 + 3\left(\frac{A}{A + B}\right)^2}} \le \frac{3}{\sqrt{6}}.\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

suy ra $\varphi \ge 30^\circ$.

Dấu = xảy ra khi $A = 0$. Khi đó $B \neq 0$ (vì nếu $B = 0$ thì $C = 0$, vô lí).

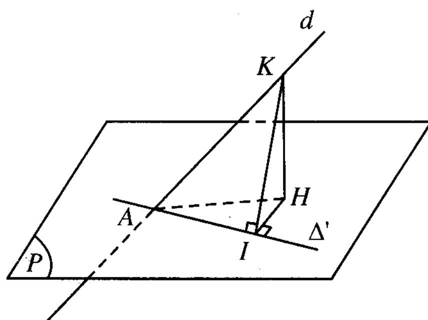
Ta chọn $B = 1$ thì $C = -(2A + B) = -1, D = 7A + 4B = 4$.

Vậy mp(R) chứa đường thẳng d và tạo với mp(P) một góc nhỏ nhất (bằng 30°) có phương trình là :

$$y - z + 4 = 0.$$

Cách 2. (h.117) Xét mặt phẳng (Q) thay đổi đi qua đường thẳng d, cắt mp(P) theo giao tuyến Δ'. Vì $A = d \cap (P)$ nên $A \in \Delta'$.

Lấy một điểm K cố định trên d $(K \neq A)$. Gọi H là hình chiếu của K trên mp(P), I là hình chiếu của H trên Δ' thì HI và KI cùng vuông góc với Δ' nên $\widehat{KIH}$ là góc giữa mp(P) và mp(Q).



Hình 117

Ta có $\tan\widehat{KIH} = \dfrac{KH}{HI}$ mà KH không đổi khi (Q) thay đổi và $HI \leq HA$ nên $\widehat{KIH}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \tan\widehat{KIH}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow HI$ lớn nhất $\Leftrightarrow I$ trùng A hay $\Delta' \perp d$ tại A, tức là Δ' trùng Δ (Δ nói ở câu 5).

Vậy mp(R) chứa đường thẳng d và tạo với mp(P) một góc nhỏ nhất khi và chỉ khi mp(R) chứa d và Δ (Δ nằm trên (P), đi qua A và vuông góc với d).

Ta có $\left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{u_\Delta}\right] = (0\,;-3\,;3)$ nên (R) có vectơ pháp tuyến là $(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$.

Vì mp(R) đi qua $A\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{10}{3}\right)$ nên có phương trình là

$$y + \frac{2}{3} - \left(z - \frac{10}{3}\right) = 0 \text{ hay } y - z + 4 = 0.$$

15. 1. Đường thẳng AB đi qua $A(3\ ;\ 3\ ;\ 1)$, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (-3\,;-1\,;0)$ nên có phương trình :

$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 3 - t \\ z = 1. \end{cases}$$

2. Ta nhận thấy $A \in$ mp(P) nên hình chiếu vuông góc của AB trên mp(P) là đường thẳng AH, trong đó H là hình chiếu của điểm B trên mp(P).

Đường thẳng BH qua $B(0\ ;\ 2\ ;\ 1)$ và vuông góc với mp(P) nên có phương trình

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t, \end{cases}$$

do đó toạ độ $(x\,;y\,;z)$ của điểm H thoả mãn hệ : $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \\ x + y + z - 7 = 0. \end{cases}$

Giải hệ ta được $t = \dfrac{4}{3} \Rightarrow H = \left(\dfrac{4}{3}\ ;\ \dfrac{10}{3}\ ;\ \dfrac{7}{3}\right).$

Phương trình đường thẳng AH là

$$\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - 4t. \end{cases}$$

3. Đường thẳng d nằm trong mp(P), đồng thời nằm trong mặt phẳng trung trực (π) của đoạn AB. Gọi I là trung điểm AB , ta có $I = \left(\dfrac{3}{2}\ ;\ \dfrac{5}{2}\ ;\ 1\right).$

Mặt phẳng (π) đi qua I và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{BA} = (3\ ;\ 1\ ;\ 0)$ nên có phương trình :

$$(\pi) : 3x + y - 7 = 0.$$

Vậy d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (π). Do đó d có phương trình :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t. \end{cases}$$

4. Vì $AB \perp \text{mp}(\pi)$ và $d \subset \text{mp}(\pi)$ nên nếu trong mp(π), kẻ đường thẳng IM vuông góc với d ($M \in d$) thì IM chính là đường vuông góc chung của AB và d.

Ta có $M = (t\,;7 - 3t\,;2t) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \left(t - \dfrac{3}{2}\ ;\ \dfrac{9}{2} - 3t\ ;\ 2t - 1\right).$

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d = (1\ ;\ -3\ ;\ 2)$.

$IM \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\,.\,\vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{17}{14}. \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \left(-\dfrac{4}{14}\ ;\ \dfrac{12}{14}\ ;\ \dfrac{20}{14}\right).$

Vậy đường vuông góc chung của AB và d là đường thẳng qua I và có vectơ chỉ phương $\dfrac{14}{4}\overrightarrow{IM} = (-1\ ;\ 3\ ;\ 5)$, đường thẳng đó có phương trình :

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2} - t \\ y = \dfrac{5}{2} + 3t \\ z = 1 + 5t. \end{cases}$$

5. *Cách 1.* $K \in AB \Rightarrow K = (3 - 3t ; 3 - t ; 1)$.

$$d(K,(P)) = d(B,(P)) \Leftrightarrow \frac{|3 - 3t + 3 - t + 1 - 7|}{\sqrt{3}} = \frac{|0 + 2 + 1 - 7|}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow |-4t| = |-4| \Leftrightarrow |t| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1. \end{array}\right.$$

Với $t = 1, K = (0 ; 2 ; 1)$ nên $K \equiv B$ (loại).

Với $t = -1$, $K = (6 ; 4 ; 1)$.

Vậy $K(6 ; 4 ; 1)$ là điểm phải tìm.

Cách 2. Vì $A \in (P)$ nên $d(K,(P)) = d(B,(P))$ khi và chỉ khi A là trung điểm của KB. Từ đó suy ra $K = (6 ; 4 ; 1)$.

6. Với $C \in d$ thì $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.CI$, AB không đổi nên S_{ABC} nhỏ nhất khi và chỉ khi IC nhỏ nhất, tức C là hình chiếu của I trên d.

Vì $C \in d$ nên $C = (t ; 7 - 3t ; 2t)$, suy ra $\overrightarrow{IC} = \left(t - \frac{3}{2}, 7 - 3t - \frac{5}{2}, 2t - 1\right)$.

Ta có $IC \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{IC}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t - \frac{3}{2} - 3\left(7 - 3t - \frac{5}{2}\right) + 2(2t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{17}{14}$.

Vậy điểm C cần tìm là $C = \left(\frac{17}{14}; \frac{47}{14}; \frac{34}{14}\right)$ (chính là điểm M ở câu 4).

16. 1. Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(0 ; 2 ; -4)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(1 ; -1 ; 2)$. Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(-8 ; 6 ; 10)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(2 ; 1 ; -1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-1; 5; 3)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (-8; 4; 14) \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 70 \neq 0$

$\Rightarrow d_1, d_2$ chéo nhau.

2. Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_2 và song song với d_1. Khi đó mp(α) qua điểm $M_2(-8 ; 6 ; 10)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-1 ; 5 ; 3)$

$\Rightarrow (\alpha) : x - 5y - 3z + 68 = 0$.

3. $d(d_1, d_2) = d(M_1,(\alpha)) = \dfrac{|0 - 10 + 12 + 68|}{\sqrt{1 + 25 + 9}} = \dfrac{70}{\sqrt{35}} = 2\sqrt{35}$.

4. Viết lại phương trình đường thẳng d_1, d_2 dưới dạng tham số. Từ đó :

$$M \in d_1 \text{ nên } M = (t\,;\,2 - t\,;\,-4 + 2t),$$

$$N \in d_2 \text{ nên } N = \left(-8+2t'\,;\,6+t'\,;\,10-t'\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-8 + 2t' - t\,;\,4 + t' + t\,;\,14 - t' - 2t).$$

Đường thẳng MN sẽ là đường thẳng d phải tìm khi $MN \,//\, Ox$ hay hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\vec{i}(1\,;\,0\,;\,0)$ cùng phương, nghĩa là

$$\begin{cases} t' + t = -4 \\ t' + 2t = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 18 \\ t' = -22. \end{cases}$$

Vậy $M = (18\,;\,-16\,;\,32)$ và đường thẳng d phải tìm có phương trình tham số :

$$d : \begin{cases} x = 18 + t \\ y = -16 \\ z = 32. \end{cases}$$

5. $A \in d_1 \Rightarrow A = (t\,;\,2 - t\,;\,-4 + 2t),$

$B \in d_2 \Rightarrow B = (-8 + 2t'\,;\,6 + t'\,;\,10 - t')$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-8 + 2t' - t\,;\,4 + t' + t\,;\,14 - t' - 2t).$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow 6t + t' = 16,$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow t + 6t' = 26.$

Giải hệ $\begin{cases} 6t + t' = 16 \\ t + 6t' = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t' = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = (2\,;0\,;0) \\ B = (0\,;10\,;6). \end{cases}$

Suy ra mặt cầu đường kính AB có tâm $I = \left(1\,;5\,;3\right)$, bán kính bằng $\sqrt{35}$. Phương trình của nó là :

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 + (z - 3)^2 = 35.$$

17. 1. Ta có $AB^2 = a^2 + b^2, BC^2 = b^2 + c^2, CA^2 = c^2 + a^2$

$\Rightarrow AB^2 + BC^2 - CA^2 = 2b^2 > 0 \Rightarrow AB^2 + BC^2 > CA^2 \Rightarrow \widehat{B}$ nhọn.

Tương tự, ta suy ra các góc $\widehat{A}, \widehat{C}$ nhọn.

2. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có tâm $I\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

3. Phương trình mp(ABC) : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Đường thẳng d đi qua gốc toạ độ O và vuông góc với mp(ABC) có phương trình là

$$\begin{cases} x = \frac{1}{a}t \\ y = \frac{1}{b}t \\ z = \frac{1}{c}t. \end{cases}$$

Suy ra toạ độ giao điểm H của đường thẳng d với mp(ABC) là

$$H = \left(\frac{ab^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2};\ \frac{ba^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2};\ \frac{ca^2b^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}\right).$$

4. Vì H là trung điểm của OO' nên $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OH}$, suy ra

$$O' = \left(\frac{2ab^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2};\ \frac{2ba^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2};\ \frac{2ca^2b^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}\right).$$

5. Ta có : $S_1 = S_{OAB} = \frac{1}{2}ab$, $S_2 = S_{OBC} = \frac{1}{2}bc$, $S_3 = S_{OCA} = \frac{1}{2}ca$

$$\Rightarrow S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

Mặt khác, $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc = \frac{1}{3}S_{ABC}.OH$,

mà $OH = d(O,(ABC)) = \dfrac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$

nên $\frac{1}{36}a^2b^2c^2 = \frac{1}{9}S^2.OH^2$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \text{ (đpcm).}$$

6. M là trung điểm của AB nên $M = \left(\frac{a}{2}\ ;\ \frac{b}{2}\ ;\ 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \left(\frac{a}{2}\ ;\ \frac{b}{2}\ ;\ 0\right)$.

N là trung điểm của BC nên $N = \left(0\ ;\ \frac{b}{2}\ ;\ \frac{c}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{ON} = \left(0\ ;\ \frac{b}{2}\ ;\ \frac{c}{2}\right)$.

P là trung điểm của CA nên $P = \left(\frac{a}{2}\ ;\ 0\ ;\ \frac{c}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \left(\frac{a}{2}\ ;\ 0\ ;\ \frac{c}{2}\right)$.

Các mặt phẳng (OMN) và (OMP) có các vectơ pháp tuyến lần lượt là

$$\overrightarrow{n_{(OMN)}} = \left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right] = \left(\frac{bc}{4}; \frac{-ac}{4}; \frac{ab}{4}\right),$$

$$\overrightarrow{n_{(OMP)}} = \left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}\right] = \left(\frac{bc}{4}; -\frac{ac}{4}; -\frac{ab}{4}\right).$$

Do đó mp$(OMN) \perp$ mp$(OMP) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_{(OMN)}}.\overrightarrow{n_{(OMP)}} = 0$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 = b^2c^2 + a^2c^2 \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \text{ (đpcm).}$$

7. $P(x_o; y_o; z_o) \in \text{mp}(ABC) \Leftrightarrow \frac{x_o}{a} + \frac{y_o}{b} + \frac{z_o}{c} = 1.$

$$\frac{AP^2}{AO^2} = \frac{(x_o - a)^2 + y_o^2 + z_o^2}{a^2} = \frac{x_o^2 + y_o^2 + z_o^2}{a^2} - \frac{2x_o}{a} + 1 = \frac{OP^2}{a^2} - \frac{2x_o}{a} + 1.$$

Tương tự, $\frac{BP^2}{BO^2} = \frac{OP^2}{b^2} - \frac{2y_o}{b} + 1$, $\frac{CP^2}{CO^2} = \frac{OP^2}{c^2} - \frac{2z_o}{c} + 1$.

Suy ra

$$\frac{AP^2}{AO^2} + \frac{BP^2}{BO^2} + \frac{CP^2}{CO^2} = OP^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) - 2\left(\frac{x_o}{a} + \frac{y_o}{b} + \frac{z_o}{c}\right) + 3$$

$$= OP^2.\frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2} + 1$$

$$= \frac{OP^2}{OH^2} + 1 = \frac{HP^2 + OH^2}{OH^2} + 1$$

$$= \frac{HP^2}{OH^2} + 2 \text{ (đpcm).}$$

MỤC LỤC